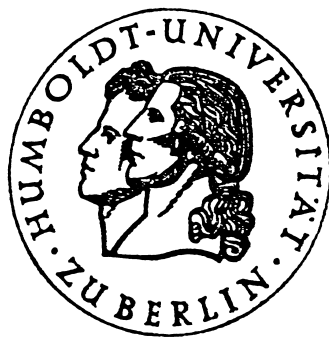


Musikalische Temperatur: Stimmungslehre

Dr. M. zur Nedden,
Humboldt Universität zu Berlin

“Was des eynen Uhl, ist des andren Nachtigall”
Abriss der historischen Stimmungslehre

Berlin, Sommersemester 2003



Übersicht

- Ursprünge des Tonsystemes
- Obertöne und Intervalle
- Die Fehler im System
 - Pythagoräisches Komma
 - Syntoisches Komma
 - Das Schisma
 - Die kleine Diesis
- Schwebungen
 - Quinte
 - Quarte
 - kleine und grosse Terz
- Geteilte Fehler – Geteilte Kommata
- Die Cent-Rechnung
 - Cent-Werte
 - Berechnung der Intervalle
 - Cent-Werte der Kommata
- Die Temperaturen

Ursprünge des Tonsystemes in der Antike

- Septem Artes Liberales:
 - Trivium: Grammatik, Arithmetik, Geometrie
 - Quadrivium: Astronomie, Dialektik, Rhetorik, Musik
- ⇒ Musik ist Teil philosophischer/theologischer Betrachtung
- Pythagoras: Zusammenhang zwischen Tonhöhe und Saitenlänge:

	Frequenz	Länge
GT : Oktave	1 : 2	2 : 1
GT : Quinte	2 : 3	3 : 2
GT : Quarte	3 : 4	4 : 3

Ordnung der Verhältnisse zur Propotion **1 : 2 : 3 : 4**

Differenz Quinte - Quarte: Tonus, Ganzton

⇒ Pythagoräische Skala

$$\begin{array}{cccccccc}
 E & \frac{8}{9} & D & \frac{8}{9} & C & \frac{243}{256} & H & \frac{8}{9} & A & \frac{8}{9} & G & \frac{8}{9} & F & \frac{243}{256} & E
 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{3:4}$
 $\underbrace{\hspace{12em}}_{2:3}$
 $\underbrace{\hspace{14em}}_{1:2}$

$\frac{243}{256}$: pythagoräischer Halbton

Ausdehnung auf 2 Oktavräume ⇒ 8 Tonleitern, Kirchentonarten im MA:

(Ionisch, Dorisch, Phrygisch, Lydisch, Mixolydisch, Aeolisch, Lokrisch)

Neue Ästhetik: Die Terz

Mittelalter: Melodiestimmen im **Quintabstand**

→ Quinten werden **rein** gestimmt

⇒ **Tetrachord** wichtig zur Bildung der Skalen:

$$\underbrace{G \cdot A \cdot H \cdot C}_{\text{Tetrachord}} \cdot \underbrace{D \cdot E \cdot F \cdot G}_{\text{Tetrachord}}$$

Kirchentonarten:

- **authentische Modi** → Finalis am Beginn der Tonleiter
Bsp: Dorisch: Finalis ist d
- **plagale Modi** → Finalis in der Mitte der Tonleiter
Bsp: Hypodorisch: Finalis ist d , Leiter beginnt mit g

⇒ **Tetrachord ist zentrale harmonische Funktion**

Spätmittelalter / Renaissance:

Entwicklung der Mehrstimmigkeit → **TERZ** wird bedeutend

⇒ **Hexachord** wichtig zur Bildung der Skalen:

$$\underbrace{G \cdot A \cdot H \cdot C \cdot D \cdot E}_{\text{Hexachord}}$$

⇒ Erweiterung der Tonskala um die fehlenden **Terzen**:

$$G \frac{G^\sharp}{A^\flat} A \frac{A^\sharp}{B} H \cdot C \frac{C^\sharp}{D^\flat} D \frac{D^\sharp}{E^\flat} E \cdot F \frac{F^\sharp}{G^\flat} G$$

Stimmungsprobleme treten auf →

Beginn der Geschichte der **musikalischen Temperatur**

Obertöne und Intervalle

Frequenzverhältnisse sind Grundlage aller Stimmungen und Temperaturen

Intervall	Frequenzverhältnisse	
	ganzzahlig	dezimal
Oktave	1: 2	1: 2
Quinte	2: 3	1: 1.5
Quarte	3: 4	1: 1.333
grosse Terz	4: 5	1: 1.25
kleine Terz	5: 6	1: 1.2
grosse Sexte	3: 5	1: 1.666
kleine Sexte	5: 8	1: 1.6
Septime	8: 15	1: 1.875

Obertonspektrum ist verantwortlich für Klangfarbe

Intervalle sind logarithmisches System:

addieren → multiplizieren

subtrahieren → dividieren

multiplizieren → exponieren

dividieren → radizieren

Das pythagoräische Komma

Einfachste Stimmung:

12 reine Quinten entsprechend 7 Oktaven

⇒ Stimme 12 Quinten und subtrahiere 7 Oktaven:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{1}\right)^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1.013643\dots$$

Wenn alles stimmen würde: Verhältnis $\equiv 1$

ABER:

12 Quinten sind mehr als 7 Oktaven !!!

Intervall, das den Unterschied darstellt:

pythagoräisches Komma

Erster wichtiger "Fehler im System" !!

Das syntonische Komma

Nach 4 reinen Quinten von $C \longrightarrow e'$

\Rightarrow grosse Terz zu c' (zwei Oktaven von C)

Subtraktion: 4 reine Quinten - 2 Oktaven:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{81}{64} = 1.265625$$

pythagoräische Terz

\rightarrow Unterschied zur bekannten Terz mit $5 : 4 = 1.25$

syntonisches (didymisches) Komma:

Differenz von 4 Quinten, 2 Oktaven und einer reinen Terz:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(\left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{81}{80} = 1.0125$$

Wichtiger Fehler beim Stimmen der Terzen !!

Das Schisma

Eine reine Terz nach vier Quinten erfordert Korrektur, z.B. durch Subtraktion des syntonischen Kommas von einer Quinte

Stimmt man dann in reinen Quinten weiter, so bleibt bei der 12. Quinte ein Rest, sodass diese enger gestimmt werden muss

Grösse dieses Fehlers entspricht der Differenz zwischen pythagorischem und syntonischem Komma:

$$\left(\left(\frac{3}{2} \right)^{12} : \left(\frac{2}{1} \right)^7 \right) : \left(\left(\frac{3}{2} \right)^4 : \left[\left(\frac{2}{1} \right)^2 \cdot \frac{5}{4} \right] \right) =$$
$$\frac{531441}{524288} : \frac{81}{80} = \frac{32805}{32768} = 1.001129$$

Schisma:

Differenz zwischen pythagorischem und syntonischem Komma:

Fehler auf die Quinten durch die Stimmung reiner Terzen

Die kleine Diesis

innerhalb der Oktave liegen 3 grosse Terzschrirte:

→ wenn alle drei Terzen rein gestimmt werden,
wird die Oktave nicht erreicht

⇒ Bestreben alle Terzen rein zu stimmen ist unerfüllbar!

Subtraktion von drei reinen Terzen von einer Oktave:

$$\frac{2}{1} : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{128}{125} = 1.024$$

Dies ist die **kleine Diesis**

⇒ nur zwei Terzen innerhalb einer Oktave können rein sein,
die dritte ist um die kleinen Diesis zu gross.

Fehler auf die Oktave durch die Stimmung reiner Terzen

Die Schwebungen

innerhalb der Oktave können nicht alle Intervalle rein gestimmt werden:

⇒ Lösung durch “verstimmen” einzelner Intervalle → **temperieren**

Kontrolle durch Schwebungen zwischen nicht ganz konsonanten Tönen:

→ **Zahl der Schwebungen** ist Mass der Beurteilung des Intervalles beim Temperieren.

Die Oktave ist immer rein gestimmt, Korrekturen werden angewand auf

Quinte, Quarte, grosse und kleine Terz

Verteilung der Fehler ist Gegenstand der Stimmungslehre und bestimmt die **musikalische Temperatur** und damit die Klangfarben

- **Stimmen:** richtiges, stimmendes Einstellen von Intervallen
- **Temperieren:** Verstimmung, Korrekturen

lat. temperatura: gehörige Vermischung, Beschaffenheit

lat. temperatus: gemässigt, gemildert

lat. temperatio: die rechte, zweckmässige Einteilung

Schwebungen der Intervalle: Quinten/Quarten

Quinte:

$a' - e''$ rein mit den Frequenzen

$$a' = 440 \text{ Hz}, e'' = 660 \text{ Hz}$$

Erniedrigen von e'' auf $e'' = 659 \text{ Hz}$

→ Quinte beginnt zu schweben

$$\left(659 \text{ Hz} \cdot 2 \right) - \left(440 \text{ Hz} \cdot 3 \right) = -2 \text{ Hz}$$

Schwebung ist negativ: Quinte ist zu eng, **unterschwebend**

Quarte:

$e' - a'$ rein mit den Frequenzen

$$a' = 440 \text{ Hz}, e' = e'' : 2 = 330 \text{ Hz}$$

Verwenden obiges e'' eine Oktave tiefer $e' = 329.5 \text{ Hz}$

→ Quarte beginnt zu schweben

$$\left(440 \text{ Hz} \cdot 3 \right) - \left(329.5 \text{ Hz} \cdot 4 \right) = +2 \text{ Hz}$$

Schwebung ist positiv: Quarte ist zu weit, **überschwebend**

Schwebungen der Intervalle: Terzen

für Schwebungen besonders anfällig: **Ansatzpunkt aller Temperaturen**

grosse Terz:

$a' - c^{\#\prime\prime}$ rein mit den Frequenzen $a' = 440$ Hz, $c^{\#\prime\prime} = 550$ Hz

Erhöhen von $c^{\#\prime\prime}$ auf $c^{\#\prime\prime} = 551$ Hz

→ grosse Terz beginnt zu schweben

$$\left(551 \text{ Hz} \cdot 4 \right) - \left(440 \text{ Hz} \cdot 5 \right) = +4 \text{ Hz}$$

grosse Terz ist meist überschwebend

kleine Terz:

$a' - c''$ rein mit den Frequenzen $a' = 440$ Hz, $c'' = 528$ Hz

Erniedrige c'' auf $c'' = 527$ Hz

→ kleine Terz beginnt zu schweben

$$\left(527 \text{ Hz} \cdot 5 \right) - \left(440 \text{ Hz} \cdot 6 \right) = -5 \text{ Hz}$$

kleine Terz ist meist unterschwebend

Teilen der Kommata – Geteilte Fehler

- temperieren bedeutet **ver-teilen** der Fehler
- a' (Kammerton) liegt fest (bei 415, 440, 460 Hz: historisch bedingt), verschiedene Möglichkeiten die Quinten und/oder Terzen zu temperieren

Teilung der Kommata bestimmt Charakter der Temperatur

Mehrere Arten sind möglich:

1. Verteilung des **pythagoräischen Kommas** in 4 - 12 Teile auf 4 - 12 Quinten, 8 - 0 Quinten werden rein gelassen:
wohltemperierte oder gleichstufige Temperatur,
in **allen Tonarten** verwendbar.
2. Verteilung des **syntonischen (bzw. pythagoräischen) Kommas** in 3 - 6 (7) Teile, damit Temperierung von 11 von 12 Quinten: grosse Terzen werden mit 4 Ausnahme rein, zwölfte Quinte wird um die Differenz zum pythagoräischem Komma zu gross (Wolfsquinte):
Mitteltönige Temperatur,
nicht in allen Tonarten verwendbar
3. Verringerung von mehr als einer Quinte (2 - 3) um jeweils ein **syntonisches Komma**, Differenz zum **pythagoräischen Komma** fällt auf eine beliebige der 12 Quinten:
reine Stimmung
mit mehreren **reinen Dur- und Moll- Dreiklängen**

Berechnung der Temperatur

Berechnungsvorgang am Beispiel der Temperierung einer Quinte um $\frac{1}{4}$ des syntonischen Kommas:

Der x -te Teil des Kommas ist die x -te Wurzel des Frequenzverhältnisses des Kommas:

$$\sqrt[4]{\frac{81}{80}} = \sqrt[4]{1.0125} = 1.00311$$

Frequenzverhältnis (**FV**) der verengten Quinte: Abziehen des Wertes des geteilten Kommas:

$$1.5 : 1.003111 = 1.4953494$$

Aus obigem FV bestimmt sich die zweite Frequenz der Quinte (z.B. für e'' über $a' = 440$ Hz)

$$e'' = 440 \text{ Hz} \cdot 1.4953494 = 657.953 \text{ Hz}$$

Die Schwebung berechnet sich wie vorher gezeigt:

$$S = (2 \cdot e'') - (3 \cdot a') =$$

$$(2 \cdot 657.953 \text{ Hz}) - (3 \cdot 440 \text{ Hz}) = -4.09 \text{ Hz}$$

die um $\frac{1}{4}$ des syntonischen Kommas engere Quinte schwebt mit

$$\rightarrow -4.09 \text{ Hz} \leftarrow$$

Die Cent-Rechnung

Vergleichen von FV von Intervallen in Dezimalen schwierig

Neue Einteilung (19. Jh, Alexander Ellis): Oktave aus 12 Halbtonen wird gleichmässig auf 1200 Teile aufgeteilt (in der gleichstufigen Temperatur)

$$1 \text{ cent} = \sqrt[1200]{\frac{2}{1}}$$

auf einen Halbton fallen dann **100 cent**:

$$\Rightarrow \text{temperierter (chromatischer) Halbton: } 100 \text{ cent} = \sqrt[12]{2}$$

Direkte Berechnung der Intervalle, direkte Vergleiche möglich

$$\text{reine Quinte: } x = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right) = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \left(\frac{3}{2} \right) = 701,955 \text{ cent}$$

temperierte Quinte: 700,00 cent

$$\text{reine grosse Terz: } x = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \left(\frac{5}{4} \right) = 386,314 \text{ cent}$$

temperierte grosse Terz: 400,00 cent

\Rightarrow temperierte – reiner Terz:

$$400 \text{ cent} - 386,314 \text{ cent} = 13,686 \text{ cent}$$

entspricht 1/7 Halbton

\Rightarrow um 1/4 des syntonischen Kommas engeren Quinte

$$x = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \left(\frac{\nu_{e''}}{\nu_{a'}} \right) = 696.580 \text{ cent}$$

Cent–Werte der Intervalle

cent–Reihe gibt den Abstand (Intervallgrösse) zum Ton C an ($C = 0$)

Bsp: Mitteltönige Temperatur:

Ton	Wert in cent
C	0.0
c^\sharp	76.0
d	193.1
e^b	310.2
e	386.3
f	503.4
f^\sharp	579.5
g	696.6
g^\sharp	772.6
a	889.7
b	1006.8
h	1082.9

⇒ Berechnung aller Intervalle

Terz $e' - g^{\sharp'}$:

$$g^{\sharp'} - e' = 772.6 \text{ cent} - 386.3 \text{ cent} = 386.3 \text{ cent}$$

Die Terz ist rein (reine Terz: 386.3 cent)

Quinte $g^{\sharp'} - e^{b''}$:

ein Ton in der nächsten Oktave: Transponieren durch Addition von 1200 cent

$$e^{b''} - g^{\sharp'} = (310.2 \text{ cent} + 1200 \text{ cent}) - 772.6 \text{ cent} = 737.6 \text{ cent}$$

Quinte viel zu gross → **Wolfsquinte** (reine Quinte: 701.9 cent)

Cent–Werte der Kommatas

mit cent–Werten erhält man eine gute Vorstellung von den Grössen der Kommatas:

- pythagoräisches Komma

$$\text{FV } 1 : 1.0136 = 23.5 \text{ cent}$$

$$\Leftrightarrow 1/4 \text{ Halbton}$$

- syntonisches Komma

$$\text{FV } 1 : 1.0125 = 21.5 \text{ cent}$$

$$\Leftrightarrow 2/9 \text{ Halbton}$$

- kleine Diesis

$$\text{FV } 1 : 1.024 = 41.0 \text{ cent}$$

$$\Leftrightarrow 2/5 \text{ Halbton}$$

- Schisma

$$\text{FV } 1 : 1.0001129 = 2.0 \text{ cent}$$

$$\Leftrightarrow 1/12 \text{ des pythagoräischen Kommas}$$

Die Temperaturen

Auswahl der wichtigsten historischen und modernen Temperaturen

- **nicht in allen Tonarten spielbar**,
einige Töne können nicht enharmonisch verwechselt werden, Auftreten von Wolfsintervallen
 - **pythagoräische Stimmungen, 15. Jh.**
(Arnold von Zwolle (1450), Johann Kirnberger (1771))
 - **reine Stimmungen, 16./17. Jh.**
(Salomon Caus (1615), Friedrich Marpurg (1776))
 - **mitteltönige Temperaturen, 16. - 18. Jh.**
(Lodovico Fogliano (1529), Michael Praetorius (1619), Georg Silbermann (1748), $1/5$ pyth. Komma (1987))
- **in allen Tonarten spielbar**,
enharmonische Verwechslung (fast) aller Töne
 - **wohltemperierte Stimmungen, 17. - 19. Jh.**
(Andreas Werckmeister (1681), $1/5$ pyth. Komma (1987), Johann Kirnberger (1779), Johann Neidhardt (1724), Thomas Young (1800))
 - **gleichstufige Temperatur, 19./20. Jh.**
(Johann Neidhardt (1732))