

Kapitel 8

Erhaltungssätze und Symmetrien

Unter einer **Symmetrie** versteht man in der Physik die Invarianz eines Naturgesetzes unter einer bestimmten Transformation. Symmetrien sind die wichtigste Grundlage zur Formulierung von Naturgesetzen: Mit Invarianzen unter Symmetrioperationen sind immer Erhaltungsgrößen verbunden oder, quantenmechanisch gesprochen, erhaltene Quantenzahlen. Das **Nöther Theorem** besagt, dass es zu jeder Transformation, unter der ein System invariant ist, eine in diesem System erhaltene physikalische Größe gibt. Man nimmt an, dass es keine Rolle spielt, wo im Universum, zu welcher Zeit und in welchem Inertialsystem ein Experiment gemacht wird, die Naturgesetze müssen immer die selben sein.

8.1 Symmetrien, Transformationen und Erhaltungssätze

8.1.1 Klassische Transformationen

In der klassischen, verallgemeinerten Mechanik beschreibt die Hamiltonfunktion für n Massenpunkte i mit den jeweiligen Impuls- und Ortskoordinaten p_i bzw. q_i die Gesamtenergie des Systemes.

$$H(p_i, q_i) = T + V \quad (i = 1, \dots, 3n) \quad (8.1)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, aus denen die gesamte Kinematik abgeleitet werden kann, lauten:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (8.2)$$

Der erste Ausdruck beschreibt die Kräfte, vom zweiten Term werden die Geschwindigkeiten beschrieben. Als Beispiel betrachten wir einen Massenpunkt im Erdschwerkfeld:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + m \cdot g \cdot z & (8.3) \\ \dot{p}_{x,y} &= 0 & \dot{p}_z = -mg & \dot{q}_i = \frac{p_i}{m} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Hamilton-Funktion, die unter Translation des Bezugssystems invariant sei, wie dies in der klassischen Mechanik der Fall ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall und schreiben x , y und z anstatt q . Die Translation lautet dann wie folgt:

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x_i + \delta x_i & \delta x_i &= \delta x \quad \forall i \\ y_i &\rightarrow y_i + \delta y_i & \delta y_i &= \delta y \quad \forall i \\ z_i &\rightarrow z_i + \delta z_i & \delta z_i &= \delta z \quad \forall i \end{aligned} \quad (8.4)$$

wobei die δx , δy und δz unabhängig gewählt werden. Die Änderung von H unter der Translation ist dann:

$$\delta H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x + \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y + \frac{\partial H}{\partial z_i} \delta z \right) = -\delta x \sum_i \dot{p}_{xi} - \delta y \sum_i \dot{p}_{yi} - \delta z \sum_i \dot{p}_{zi} \quad (8.5)$$

Die Bedingung, dass H invariant unter der Translation bleibt, ist $\delta H = 0$. Daraus folgt (analog für alle Komponenten x , y und z):

$$\sum_i \dot{p}_{xi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i p_{xi} = \text{const.} \quad (8.6)$$

Also folgt aus der Invarianz der Hamiltonfunktion unter der Symmetrieoperation der Translation des Raumes die Erhaltung des Gesamtimpulses des Systemes. Analog folgt aus der Invarianz der Hamiltonfunktion unter der Translation der Zeit die Energieerhaltung.

8.1.2 Quantenmechanische Behandlung

Wie wir bereits im Einführungskapitel gesehen haben (Kap. 1.3), beschreibt man in der Quantenmechanik die diskreten Zustandsgrößen eines Zustandes $|\Psi\rangle$ mittels Eigenwerten von Operatoren, die auf die Wellenfunktionen $\Psi(\vec{x})$ wirken. Die Hamiltonfunktion der klassischen Mechanik wird dann zum Hamiltonoperator \hat{H} der auf die Eigenzustände von Ψ angewandt wird und dessen Eigenzustände die Energien sind:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (8.7)$$

Eine Transformation U wirkt wie folgt auf das System:

$$U(\hat{H}\Psi) = U\hat{H}U^{-1}U\Psi = \hat{H}'\Psi' \quad (8.8)$$

Wenn \hat{H} unter der Transformation U invariant bleibt, so folgt daraus:

$$\hat{H}' = U\hat{H}U^{-1} = \hat{H} \quad \Rightarrow \quad U\hat{H} = \hat{H}U \quad \Rightarrow \quad [U, \hat{H}] = 0 \quad (8.9)$$

Wenn der Hamiltonoperator \hat{H} unter der Transformation U invariant ist, vertauschen U und \hat{H} und können gemeinsame Eigenzustände haben. Allgemein gilt, dass zu jeder Transformation, unter der \hat{H} invariant bleibt, es einen Operator gibt, dessen Eigenwerte erhalten sind.

Betrachten wir wieder als Beispiel die räumliche Translation. Der Operator der Translation ist der Impulsoperator. Unter einer infinitesimalen Translation

$$\delta U : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \delta\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \hat{T}\Psi(\vec{x}) = \Psi(\vec{x} + \delta\vec{x}) \quad (8.10)$$

transformiert sich die Wellenfunktion mittels

$$\Psi(\vec{x}) \rightarrow \Psi(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \Psi(\vec{x}) + \delta\vec{x} \cdot \nabla\Psi(\vec{x}) = (1 + i\delta\vec{x}\hat{\vec{P}})\Psi(\vec{x}) \quad (8.11)$$

Entsprechend Gl. 1.29 hatten wir $\nabla = i\hat{\vec{P}}$ benutzt. Eine endliche Translation

$$U(\Delta\vec{x}) : \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \Delta\vec{x} \quad \text{mit} \quad \Delta\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \delta\vec{x} \quad (8.12)$$

läßt sich aus unendlich vielen infinitesimalen Translationen aufbauen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\hat{\vec{P}} \delta\vec{x})^n = e^{i\hat{\vec{P}} \Delta\vec{x}} = U(\Delta\vec{x}) \quad (8.13)$$

Die Operatoren $\hat{\vec{P}} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z)$ sind die Generatoren der Translationsgruppe. Da der Hamiltonoperator \hat{H} mit dem Translationsoperator $\hat{\vec{P}}$ kommutiert, sind die Impulszustände gemeinsame Eigenzustände, der Impuls ist demnach unter der Translation erhalten:

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi_0 e^{i(Et - \vec{x}\vec{p})} \quad (8.14)$$

Gruppen

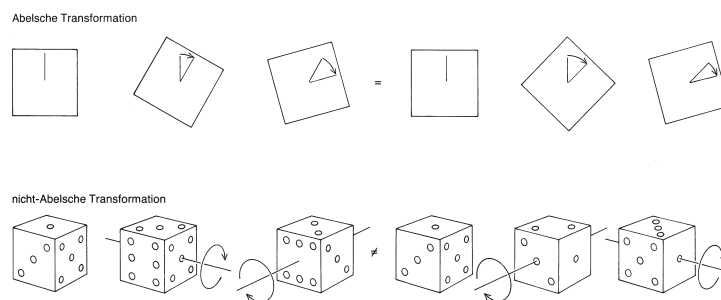


Abbildung 8.1: Drehungen in der Ebene sind abel'sch, im Raum aber nicht-abel'sch.

Mathematisch gesehen hat eine Transformation die Struktur einer Gruppe. Eine Gruppe \mathcal{G} ist eine Menge von Objekten, auf der eine Verknüpfung (\cdot) definiert ist, und die folgenden Axiomen genügt:

1. $a \cdot b \in \mathcal{G} \quad \forall a, b \in \mathcal{G}$ (Verknüpfung)
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathcal{G}$ (Assoziativgesetz)
3. $\exists e : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in \mathcal{G}$ (Einselement)
4. $\exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \quad \forall a \in \mathcal{G}$ (Inverses)

Das Kommutativgesetz ($a \cdot b = b \cdot a$) wird nicht gefordert, da es Gruppen gibt, bei denen dies nicht erfüllt ist. Gilt das Kommutativgesetz, so spricht man von einer Abel'schen Gruppe. Als Beispiel betrachten wir die Drehungen in der Ebene und im Dreidimensionalen. In Abb. 8.1 ist dies anschaulich dargestellt. Die Drehung in der Ebene ist kommutativ im Gegensatz zur Drehung im Raum. Die kontinuierlichen Drehungen entsprechen der Gruppe der orthogonalen Transformationen, im Falle von 3 Dimensionen ist dies die Gruppe $O(3)$. Es gibt aber auch durchaus Drehungen, die diskrete Eigenwerte haben, wie aus Abb. 8.2 einfach ersichtlich ist. Diskrete Symmetrien spielen in der Teilchenphysik eine zentrale Rolle, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden. Ferner ist die Spindynamik nur mit diskreten Drehgruppen beschreibbar.

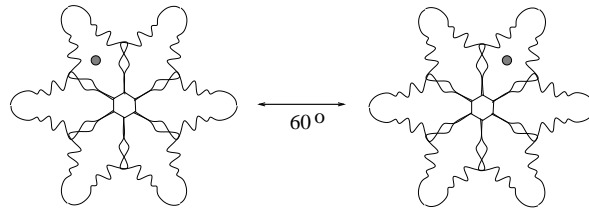


Abbildung 8.2: *Diskrete Symmetrie.*

8.2 Drehungen

8.2.1 Ganzzahlige Drehimpulse

Entsprechend der Generatoren für die Translationsgruppen sind die Generatoren der Drehgruppen die Drehimpulsoperatoren:

$$\hat{\vec{L}} = \vec{x} \times \hat{\vec{P}} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla} \quad \hat{\vec{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z) \quad (8.15)$$

Ist der Hamiltonoperator invariant unter Drehungen, so existieren gemeinsame Eigenzustände zu \hat{H} , \hat{L}^2 und \hat{L}_z . Wie die Invarianz unter der Translation zur Impulserhaltung führt, kann die Erhaltung des Drehimpulses aus der Rotationssymmetrie hergeleitet werden. Rotationsinvarianz bedeutet, dass alle Raumrichtungen physikalisch ununterscheidbar sind. Die allgemeine Drehung unter einem Winkel θ , die den Vektor \vec{x} in den Vektor \vec{x}' überführt, wird als Drehung um die z -Achse beschrieben:

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x'_i = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \\ y_i &\rightarrow y'_i = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \\ z_i &\rightarrow z'_i = z_i \end{aligned} \quad (8.16)$$

Um die Drehimpulserhaltung herzuleiten gehen wir der Einfachheit halber von einem Spin-0 Teilchen aus, das sich in einem Zentralpotential befindet. Dann braucht man

nur noch infinitesimale Drehung um den Winkel $\delta\theta$ zu berücksichtigen und Gl. 8.16 reduziert sich zu:

$$\begin{aligned}x' &= x - y\delta\theta \\x' &= x\delta\theta + y \\z' &= z\end{aligned}$$

Entsprechen zum Translationsoperator \hat{T} (Gl. 8.10) definiert man einen Rotationsoperator \hat{R}_z für eine Rotation um die z -Achse:

$$\hat{R}_z(\delta\theta)\Psi(\vec{x}) \equiv \Psi(\vec{x}') = \Psi(x - y\delta\theta, x\delta\theta + y, z) \quad (8.17)$$

Wie in Gl. 8.11 kann die rechte Seite von Gl. 8.17 in erster Ordnung $\delta\theta$ entwickelt werden:

$$\Psi(\vec{x}') = \Psi(\vec{x}) - \delta\theta \left(y \frac{\partial\Psi}{\partial x} - x \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) = (1 + i \delta\theta \hat{L}_z) \Psi(\vec{x}) \quad (8.18)$$

wobei entsprechend Gl. 8.15 $\hat{L}_z = -i(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$ die z -Komponente des Drehimpulsoperators \hat{L} ist. Die Drehung um eine beliebige Achse wird dann entsprechend beschrieben, wenn man die z -Achse durch eine beliebige Achse mit dem Normalenvektor \vec{n} ersetzt:

$$\hat{R}_n(\delta\theta)\Psi(\vec{x}) \equiv \Psi(\vec{x}') \quad \Rightarrow \quad \hat{R}(\delta\theta) = (1 + i \delta\theta \hat{L} \cdot \vec{n}) \quad (8.19)$$

Die Drehimpulserhaltung wird nun analog des formalen Vorgehens bei der Impulserhaltung hergeleitet. Wir beschreiten gleich den quantenmechanischen Weg: Der Drehimpulsoperator \hat{R} angewandt auf eine Wellenfunktion liefert:

$$\Psi'(\vec{x}) = \hat{H}(\vec{x})\Psi(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \hat{R}_n\Psi'(\vec{x}) = \hat{R}_n\hat{H}(\vec{x})\Psi(\vec{x}) \quad (8.20)$$

und unter Verwendung der Definition von Gl. 8.19 erhält man:

$$\hat{R}\Psi'(\vec{x}) = \Psi'(\vec{x}') = \hat{H}(\vec{x}')\Psi(\vec{x}') = \hat{H}(\vec{x})\Psi(\vec{x}') = \hat{H}(\vec{x})\hat{R}\Psi(\vec{x}) \quad (8.21)$$

wobei die Invarianz der Hamiltonfunktion $H(\vec{x}') = H(\vec{x})$ benutzt wurde. Der Vergleich von Gl. 8.20 und Gl. 8.21 liefert für eine beliebige Wellenfunktion $\Psi(\vec{x})$ den Kommutator:

$$[\hat{R}\hat{H}(\vec{x}) - \hat{H}(\vec{x})\hat{R}]\Psi(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{R}, \hat{H}] = 0 \quad (8.22)$$

Da der Drehimpulsoperator und der Hamiltonoperator vertauschen, existieren gemeinsame Eigenzustände, woraus die Erhaltung der Drehimpulse aus der Rotationsinvarianz sofort folgt:

$$[\hat{L}, \hat{H}] = 0 \quad (8.23)$$

Dies gilt allerdings nur, entsprechend unserer Ausgangsannahme, für spinlose Teilchen.

Die Drehimpulsoperatoren wirken nur auf den winkelabhängigen Teil der Wellenfunktionen. Eine Wellenfunktion Ψ kann auch in Kugelkoordinaten dargestellt

werden ($\Psi(r, \theta, \phi)$), die Eigenfunktionen der ganzzahligen Drehimpulse sind dann die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$:

$$\hat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)Y_l^m \quad \hat{L}_z Y_l^m = mY_l^m \quad (8.24)$$

Wir wollen uns das am Beispiel des Zerfalles eines ρ -Mesons in zwei π -Mesonen verdeutlichen (Abb. 8.3). Pionen¹ haben den Spin $J = 0$, ρ -Mesonen hingegen $J = 1$.

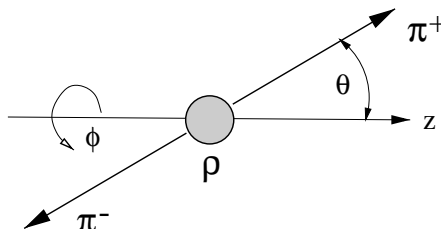


Abbildung 8.3: Der Zerfall $\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-$.

Wir nehmen an, dass die ρ -Mesonen mit $J_z = 1$ in der z -Richtung polarisiert seien. Somit müssen die ρ 's die Rotationseigenschaften von $Y_1^1(\theta, \phi)$ besitzen. Drehimpulsinvarianz bedeutet, dass der Drehimpuls im Anfangs- und im Endzustand der selbe sein muß, demnach müssen die Pionen im Endzustand auch diese Eigenschaft aufweisen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist durch das Amplitudenquadrat der Wellenfunktion gegeben, somit folgt für die Winkelverteilung der Pionen:

$$|Y_1^1(\theta, \phi)|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (8.25)$$

woraus folgt, dass die Pionen bevorzugt senkrecht zur z -Achse emittiert werden und die Emissionsrichtung unabhängig vom Azimutwinkel ϕ ist. Also kann man durch die Messung der Winkelverteilungen von Zerfallsprodukten Aussagen über deren Spinzustände machen.

8.2.2 Halbzahlige Drehimpulse

Aus den Experimenten kennt man halbzahlige Spinzustände, wie etwa bei Elektronen, Protonen oder Neutronen. Wir wollen, um ein vollständiges Bild der Drehimpulsformalismen der Teilchenphysik zu bekommen, auch die halbzahligen Drehimpulse in den Formalismus der Gruppentheorie einbetten. Der Formalismus der halbzahligen Drehimpulse wird zur Beschreibung der Spindynamik von Fermionen verwendet. Weitere Anwendungen des Spinformalismus, wie etwa den Isospin, werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

Wenn ein Teilchen einen Spin hat, so ist der totale Drehimpuls \vec{J} beschrieben durch die Summe des orbitalen Drehimpulses \vec{L} und des Spins \vec{S} :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (8.26)$$

¹Die Teilchen werden in Kapitel 9 richtig eingeführt und ausführlich diskutiert.

und die Wellenfunktion Ψ kann als Produkt einer räumlichen Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ und einer Spinfunktion χ geschrieben werden:

$$\Psi = \psi(\vec{x}) \cdot \chi \quad (8.27)$$

Üblicherweise werden die Spin- $\frac{1}{2}$ Operatoren \hat{S} durch die Paulischen Spinmatrizen $\vec{\sigma}$ beschrieben:

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\sigma} \quad (8.28)$$

wobei

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Die Generatoren der halbzahligen Drehgruppen seien $\vec{\hat{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)^2$ und bilden eine "Lie-Algebra"³ die durch die folgende Vertauschungsrelation definiert ist:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \hat{J}_i \hat{J}_j - \hat{J}_j \hat{J}_i = i \epsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad (8.30)$$

Für $i \neq j$ ist der Ausdruck 8.30 ungleich 0, die Ausführung infinitesimaler Drehungen ist nicht kommutativ (oder nicht-abelsch). Man kann zeigen, dass \hat{J}^2 mit allen Operatoren der Algebra vertauscht:

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0 \quad \text{für alle } i \quad (8.31)$$

Mit 8.30 ist die maximale Anzahl kommutierender Operatoren 2, wie z.B. etwa \hat{J}^2 und \hat{J}_z .

Die Eigenzustände zu \hat{J}^2 und \hat{J}_z bestimmen die irreduziblen Darstellungen $|j, j_z\rangle$ der Drehgruppe:

$$\hat{J}^2 |j, j_z\rangle = j(j+1) |j, j_z\rangle \quad (8.32)$$

$$\hat{J}_z |j, j_z\rangle = j_z |j, j_z\rangle \quad (8.33)$$

Zu jedem j gehören $2j+1$ Zustände mit unterschiedlichem j_z . Diese Zustände transformieren sich bei Drehungen untereinander, wobei j fest bleibt wegen der Drehimpulserhaltung. Die Darstellung heist irreduzibel, da sie mindestens diese $2j+1$ Zustände braucht.

Die Drehgruppe $O(3)$ ist homomorph zur Gruppe $SU(2)$, deren niedrigste Darstellung (Fundamentaldarstellung) mit $j = 1/2$ genau $2j+1 = 2$ Zustände hat. Diese können als 2-komponentige Spinoren dargestellt werden:

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8.34)$$

² L soll weiterhin den Bahndrehimpuls bezeichnen.

³Auf dem mathematischen Objekt einer Algebra sind zwei Verknüpfungen definiert (typischerweise Addition und Multiplikation), bei einer Lie-Algebra ist die zugrunde liegende Gruppe kontinuierlich.

Die beiden Spinoren sind die Basisvektoren der Fundamentaldarstellung, in der die Drehimpulsoperatoren durch die Pauli-Matrizen dargestellt werden:

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}\sigma_z \quad (8.35)$$

Die Operatoren \hat{J}^2 und \hat{J}_z sind diagonal, \hat{J}^2 ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix und \hat{J}_z hat die Eigenwerte $(-j, -(j+1), \dots, j-1, j)$ in der Diagonalen. Mit $j = 1/2$ ergibt sich dann:

$$\hat{J}_z = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

Abschliessend sei noch bemerkt, dass Rotationsinvarianz von $\hat{\vec{J}}$ nicht bedeutet, dass \vec{L} und \vec{S} separat erhalten sind. Im Allgemeinen sind die orbitalen Drehimpulse und die Spins wegen der Existenz Spin-abhängiger Kräfte nicht erhalten:

$$[\hat{\vec{L}}, \hat{H}] = -[\hat{\vec{S}}, H] \neq 0 \quad (8.37)$$

8.3 Erhaltungsgrößen

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Erhaltungsgrößen gegeben:

Energie, Impuls und Drehimpuls

Die Energie E , der Impuls \vec{p} und der Drehimpuls \vec{j} sind in abgeschlossenen Systemen immer erhalten:

$$\sum_i E_i = \text{const.} \quad \sum_i \vec{p}_i = \text{const.} \quad \sum_i \vec{j}_i = \text{const.} \quad (8.38)$$

Ladung

Die Summe der elektrischen Ladungen Q ist bei einer Reaktion immer strikt erhalten, dh. sie ist im Anfangs- und Endzustand immer gleich. Die Ladungsquantenzahl ist additiv:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^- n \quad Q : -1 + 1 \rightarrow 0 + 1 - 1 + 0 \quad (8.39)$$

Colour

Die Ladungen der starken Wechselwirkung heissen **colours** und treten in drei Ladungszuständen auf (rot, grün und blau). Sie sind absolut erhalten. Dies wird später in der QCD (Quanten Chromo Dynamik) behandelt.

CPT

Alle Naturgesetze sind invariant unter einer gleichzeitigen Teilchen–Antiteilchen Vertauschung (C -Parität) und einer räumlichen (P -Parität) und zeitlichen (T -Parität) Spiegelung. Also eine am Ursprung gespiegelte Antiwelt, die in der Zeit rückwärts läuft ist identisch zu unserer “wirklichen” Welt. Aus dem CPT -Theorem folgt auch die wichtige Aussage, dass die Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen exakt gleich sein müssen.

Teilchenzahlen

Die Teilchenzahlen von Fermionen müssen dem Energiessatz entsprechend streng erhalten sein, da sie die Teilchen sind, die die Materie bilden. Wegen der Äquivalenz von Energie und Materie kann man auch nicht spontan Materie erzeugen oder vernichten. Bei Fermionen unterscheidet man zwischen Baryonen (Teilchen die an der starken Wechselwirkung teilhaben) und Leptonen (Teilchen der schwachen Wechselwirkung). Teilchen haben positive Teilchenzahlen, Antiteilchen negative.

1. Baryonen

Die Kernbausteine p und n haben $B = +1$. Baryonen sind aus drei Quarks aufgebaut ($|qqq\rangle$), demnach müssen Quarks $B = 1/3$ haben.

	p	n	q	\bar{p}	\bar{n}	\bar{q}
B	+1	+1	+1/3	-1	-1	-1/3

2. Leptonen

Jede Leptonfamilie hat ihre eigene, getrennt erhaltene Quantenzahl L_e , L_μ und L_τ :

	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$
L_e	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
L_μ	0	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	0	0
L_τ	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1

Die Erzeugung von Leptonen erfolgt immer assoziiert als Lepton–Antilepton–Paar, das klassische Beispiel ist der β -Zerfall des Neutrons:

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad L_e : 0 \rightarrow 0 + 1 - 1$$

Ein anderes Beispiel, bei dem zwei Leptonfamilien auftreten, ist der μ -Zerfall:

$$\mu \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \quad L_e : 0 \rightarrow +1 - 1 + 0 \quad L_\mu : +1 \rightarrow 0 + 0 + 1$$

Andere Zerfälle des μ , wie etwa $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ werden nicht beobachtet, obwohl dort alle Quantenzahlen, abgesehen von den jeweiligen Leptonzahlen, erhalten wären.

8.4 Klassifikation von Symmetrien

Raum–Zeit–Symmetrien

Transformation	Erhaltungsgröße	Bemerkung
Translation des Raumes Translation der Zeit Drehung	\vec{P} (ablesch) E (ablesch) \vec{J} (nicht abelsch)	kontinuierliche Transformation, additive Quantenzahlen z.B. $\vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
Raumspiegelung Zeitumkehr	Parität P T -Parität	diskrete Transformationen, multiplikative Quantenzahlen z.B. $P_{tot} = P_1 \cdot P_2$

Innere Symmetrien

Erhaltungsgrößen, die nicht mit Raum–Zeit–Symmetrien verbunden sind, werden inneren, abstrakteren Symmetrien zugeordnet, die nicht in allen Wechselwirkungen erhalten sind. Ein Beispiel ist die Beobachtung der Erhaltung der Quark–Flavours (up, down, strangeness, charme, bottom, top) unter der starken Wechselwirkung. Diese Beobachtung führte zur Entwicklung des Quarkmodelles (einer $SU(3)$ -Symmetrie).

8.5 Die diskreten Symmetrien C , P , T und das CPT -Theorem

Die diskreten Symmetrien C , P und T sind wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll}
 P: & \text{Raumspiegelung} \quad \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\
 T: & \text{Zeitumkehr} \quad t \rightarrow -t \\
 C: & \text{Ladungskonjugation} \quad \text{Teilchen} \rightarrow \text{Antiteilchen} \quad Q \rightarrow -Q
 \end{array}$$

Diese Symmetrien wurden zunächst als allgemein gültig angenommen. Die Entdeckung der Verletzung der Paritätserhaltung in der schwachen Wechselwirkung 1957 hatte einen großen Einfluss auf die weitere Entwicklung der Teilchenphysik. Die Paritätsverletzung ist heute eine der wichtigsten Fragestellungen der aktuellen Forschung der Teilchenphysik.

8.5.1 Parität

Die Raumspiegelung ist eine uneigentliche Lorent–Transformation ($\det = -1$), die nur das Vorzeichen der Raumkomponente ändert:

$$x = (t, \vec{x}) \longrightarrow x' = (t, -\vec{x}) \quad (8.40)$$

Das Transformationsverhalten einer physikalischen Größe definiert deren mathematische Struktur. Für die Raumspiegelung gilt:

Skalar S :	$S \rightarrow S$	Temperatur, Druck, etc.
Pseudoskalar P :	$P \rightarrow -P$	Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
Vektor V :	$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$	Impuls, Geschwindigkeit, etc
Axialvektor A :	$\vec{a} \rightarrow \vec{a}$	Kreuzprodukt $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

Auf eine Wellenfunktion angewandt ergibt die Paritätsoperation:

$$\hat{P}\Psi(\vec{x}) = \Psi(-\vec{x}) \quad (8.41)$$

Für freie Teilchen gilt $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, woraus folgt, dass gemeinsame Eigenzustände zu \hat{H} und \hat{P} existieren.. Die Eigenwerte von \hat{P} sind $P = \pm 1$, was man allgemein als *Parität* bezeichnet:

$$\hat{P}(\hat{P}\Psi(\vec{x})) = \hat{P}\Psi(-\vec{x}) = \Psi(\vec{x}) = P^2\Psi(\vec{x}) \quad (8.42)$$

Die räumliche Konstellation eines Teilchensystemes wird durch die relativen Bahndrehimpulse bestimmt, die durch die Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden. Diese haben die folgenden Spiegelungseigenschaften:

$$\hat{P}Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m \quad (8.43)$$

Als **Eigenparität** von Teilchen bezeichnet man deren P -Eigenwerte, für das Photon γ erhält man beispielsweise $P_\gamma = -1$. Die Parität ist wie der Spin eine fundamentale Eigenschaft der Teilchen, und wird deshalb in den Tabellen immer mitangegeben. Im Falle des Photons γ erhält man dann $J^P = 1^-$ oder für das Pion π $J^P = 1^+$. Die Transformationseigenschaften eines Photons sind damit die eines Vektors und die des Pions die eines Pseudoskalares.

Für Antiteilchen kann man nur relative Paritäten zu den Teilchen angeben. Allgemein gilt für Fermionen (f) und Bosonen (b):

$$\text{Fermionen: } P_f \cdot P_{\bar{f}} = -1 \quad \text{Bosonen: } P_b \cdot P_{\bar{b}} = +1 \quad (8.44)$$

Die Parität ist eine multiplikative Quantenzahl, die Eigenparitäten aller Teilchen multiplizieren sich. Für die Parität des Systemes spielen aber noch die räumlichen Konstellationen, die durch die Bahndrehimpulse gegeben sind, eine Rolle. Wegen

$$\hat{P}Y_l^m = Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m \quad (8.45)$$

trägt ein relativer Bahndrehimpuls l mit einem Faktor $(-1)^l$ bei. Beispielsweise gilt in einem Zweiteilchensystem $P_{tot} = P_1 \cdot P_2 \cdot (-1)^l$. Die Quantenzahlen des Pions ($J^P(\pi) = 0^-$) kann man nun so deuten, dass das Pion ein Fermi-Antifermion Zustand ohne relativem Bahndrehimpuls und mit Gesamtspin 0 ist. Die negative Parität des Photons versteht man mit der Tatsache, dass bei einem elektrischen Dipolübergang im Atom der Bahndrehimpuls sich um $\Delta l = 1$ ändert und damit die Paritäten umgekehrt werden. Der Dipolübergang entspricht der Emission oder Absorption eines Photons ohne relativem Bahndrehimpuls.

8.5.2 Ladungskonjugation

Der Ladungskonjugationsoperator \hat{C} vertauscht Teilchen in Antiteilchen und wechselt bei allen ladungsartigen Quantenzahlen das Vorzeichen:

$$\hat{C}|e^{-}\rangle = \eta|e^{+}\rangle \quad (8.46)$$

wobei die willkürliche Phase η üblicherweise als $\eta = \pm 1$ gewählt wird. Bei einem Eigenzustand von \hat{P} müssen alle ladungsartigen Quantenzahlen 0 sein (Bsp: γ und π^0 , nicht aber ν_e und $\bar{\nu}_e$, da $L_e \neq 0$). Wie bei der Parität sind die C -Eigenwerte $C = \pm 1$. Die C -Parität des Photons ist beispielsweise $C_\gamma = -1$, da das Photon das Quant ist, das von einer Ladung q erzeugt wird:

$$|\gamma\rangle \sim qA^\mu \quad \Rightarrow \quad \hat{C}|\gamma\rangle \sim -qA^\mu \quad (8.47)$$

Da die C -Parität eine multiplikative Quantenzahl ist, gilt für ein System von n Photonen beispielsweise $C = (-1)^n$. Das π^0 -Meson zerfällt in zwei Photonen, also gilt:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad \Rightarrow \quad \hat{C}|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle \quad (8.48)$$

Entsprechend findet man in den Tabellen für das Pion $J^{PC}(\pi^0) = 0^{-+}$ und für das Photon $J^{PC}(\gamma) = 0^{-}$. Für Fermion-Antifermionsysteme (z.B. Positronium (gebundenes e^+e^- System) oder Quarkonium (gebundenes $q\bar{q}$ System)) mit Bahndrehimpuls L und Gesamtspin S ergibt sich die C -Parität zur

$$C_{f\bar{f}} = (-1)^{L+S} \quad (8.49)$$

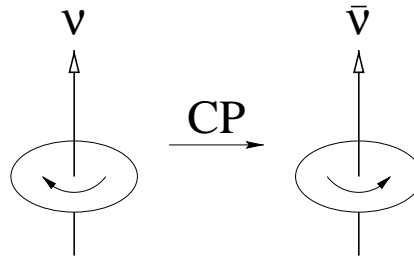
Dadurch wird festgelegt, ob ein System in eine gerade oder ungerade Anzahl von Photonen zerfallen kann⁴.

8.5.3 CP -Invarianz

Wie wir beim Goldhaber-Experiment (Kap. 6.4.2 über den β -Zerfall) gesehen haben, hat das Neutrino ν immer eine negative Helizität (Orientierung des Spins relativ zum Impuls). Dies definiert eine linkshändige Schraube. Schrauben im Spiegel betrachtet haben einen umgekehrten Drehsinn, somit ist in der schwachen Wechselwirkung die Parität verletzt. Einen rechtshändigen Drehsinn haben hingegen die Antineutrinos, es scheint also allgemein in der schwachen Wechselwirkung der Fall zu sein, dass die gleichzeitige Ausführung der Paritätsoperation und der Teilchen-Antiteilchen Transformation (CP -Operation), die physikalischen Gesetze invariant läßt (Abb. 8.4). Dies ist aber 1967 experimentell in Systemen neutraler Kaonen K^0 widerlegt worden. Die CP -Verletzung ist allerdings sehr klein, in der Größenordnung von 10^{-9} der CP erhaltenden Prozesse

Die CP -Verletzung hat eine fundamentale Bedeutung für die Entwicklung des frühen Universums. Offensichtlich besteht heute ein Überschuss an Materie, was im Gegensatz zu den oben formulierten Erhaltungssätzen der Teilchenzahlen für

⁴Beispielsweise ist für das π^0 $L + S = 0$, also $C = +1$

Abbildung 8.4: CP -Transformation für Neutrinos.

Fermionen steht. Ein Grund für die Dominanz der Materie im Universum könnte die CP -Verletzung sein, da dies gleichbedeutend mit einer Materie–Antimaterie–Asymmetrie ist. Das Standard–Modell der Teilchenphysik sagt voraus, dass CP -Verletzende Prozesse auch in anderen Systemen auftreten sollten, wie etwa bei Teilchen mit s - oder b -Quarks (Bottom, $m_b \approx 4.5$ GeV). Dies ist in den letzten Jahren in der vorhergesagten Stärke bestätigt worden. Wegen ihrer fundamentalen Bedeutung sind CP -verletzende Prozesse heute eines der zentralen Forschungsthemen in der Teilchenphysik (Kap. 9.4.3 und Kap. 11.3).

8.5.4 Zeitumkehrinvarianz und das CPT -Theorem

Alle Wechselwirkungen sind symmetrisch unter den zusammengesetzten Operationen C , P und T , physikalische Prozesse zwischen Elementarteilchen verlaufen identisch wie die gespiegelten zeitlich rückwärts laufende Prozesse zwischen den entsprechenden Antiteilchen. Aus der CPT -Invarianz folgt, dass die Massen, Ladungen, magnetischen Momente und mittleren Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen gleich sein müssen.

Da in der schwachen Wechselwirkung CP nicht erhalten ist, muß auch T verletzt sein, was bisher noch nicht experimentell in fundamentalen Prozessen nachgewiesen werden konnte. In makroskopischen Systemen⁵ sind Prozesse irreversibel. Dies ist ein statistischer Effekt, wie man ihn beispielsweise aus der kinetischen Gastheorie kennt.

In der Teilchenphysik ist der Wirkungsquerschnitt einer Reaktion $a + b \rightarrow c + d$ gegeben durch den Flußfaktor $\Phi(a, b)$, dem Matrixelement \mathcal{M}_{fi} um dem Phasenraumfaktor des Endzustandes $\mathcal{PS}(E_{tot}, c, d)$:

$$d\sigma(a + b \rightarrow c + d) = \Phi(a, b) \cdot \mathcal{M}_{fi}(a + b \rightarrow c + d) \cdot \mathcal{PS}(E_{tot}, c, d) \quad (8.50)$$

und für den Umkehrprozess lautet der Wirkungsquerschnitt entsprechend:

$$d\sigma(c + d \rightarrow a + b) = \Phi(c, d) \cdot \mathcal{M}_{fi}(c + d \rightarrow a + b) \cdot \mathcal{PS}(E_{tot}, a, b) \quad (8.51)$$

Im allgemeinen sind diese Wirkungsquerschnitte nicht gleich. Die Zeitumkehrinvarianz fordert nur, dass die Matrixelemente \mathcal{M}_{fi} gleich sind. In Abb. 8.5 wird ein Test der Zeitumkehrinvarianz in der Reaktion $^{27}\text{Al} + p \leftrightarrow ^{24}\text{Mg} + \alpha$ gezeigt. Um

⁵also bei Systeme der Größenordnung von N_L Teilchen

die T -Invarianz zu überprüfen, muß man observable Skalare messen, die bei der Zeitumkehr ihr Vorzeichen ändern, bei T -Invarianz müßen diese Skalare dann exakt Null sein. Die Wirkung der P und T -Operationen auf verschiedene physikalische Größen gestaltet sich wie folgt:

Größe	T	P
\vec{x}	\vec{x}	$-\vec{x}$
\vec{p}	$-\vec{p}$	$-\vec{p}$
$\vec{\sigma} = \vec{x} \times \vec{p}$	$-\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$
\vec{E}	\vec{E}	$-\vec{E}$
\vec{B}	$-\vec{B}$	\vec{B}
$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$
$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$

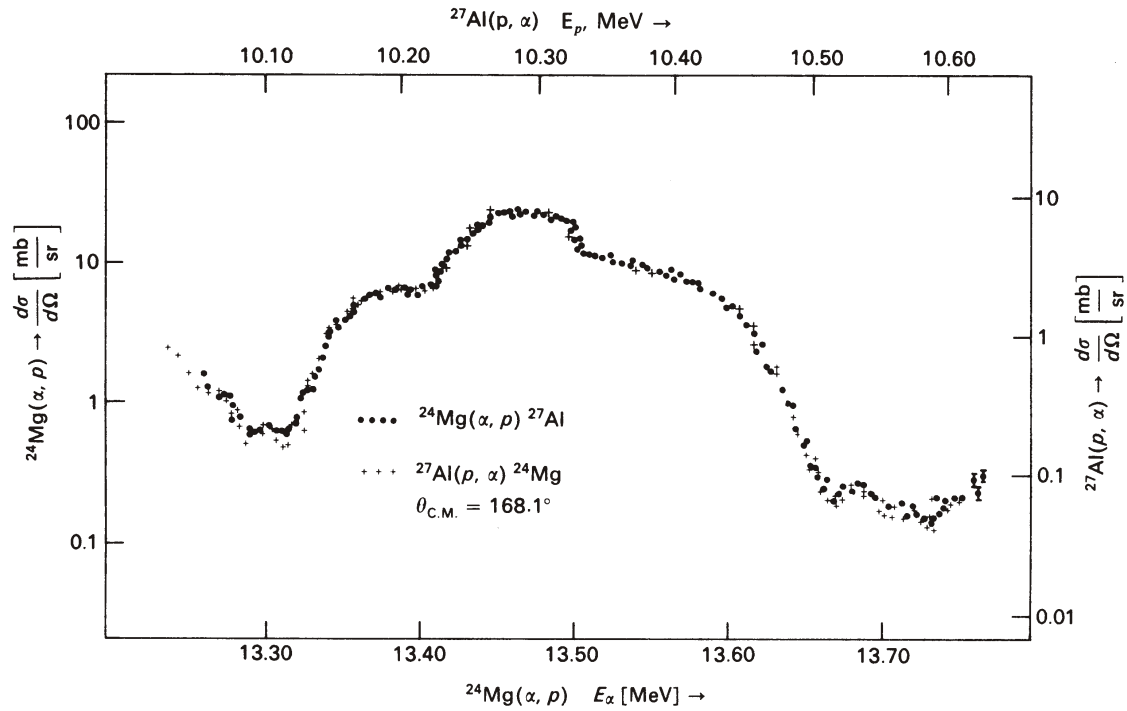


Abbildung 8.5: Test der Zeitumkehrinvarianz.

Da die einzige für ein Teilchen ausgezeichnete Richtung die Spinrichtung ist, müßte ein von Null verschiedenes elektrisches Dipolmoment (EDM) die Richtung des Spins haben: $\vec{d}_e = EDM \cdot \vec{\sigma}/|\vec{\sigma}|$, woraus für die resultierende Energie des Dipols im elektrischen Feld \vec{E} folgt:

$$\Delta E = EDM \cdot \frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} \cdot \vec{E} \quad (8.52)$$

Wenn T -Invarianz gilt, so muß dieser Ausdruck Null sein, da $\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$ das Vorzeichen wechselt, woraus folgt, dass das EDM des Teilchens Null sein muß. Die besten Gren-

zen erhält man bis jetzt für das Neutron:

$$EMD(\text{Neutron}) < 0.63 \cdot 10^{-25} e \cdot \text{cm} \quad (8.53)$$

Um die Präzision dieser Messung zu verstehen, kann man sich klar machen, dass das Ergebnis von (8.53) einer Verschiebung von 10^{-12} Elementarladungen (e) über den Durchmesser des Neutrons entspricht.