Kapitel 8

Ursprung der Materie

8.1 Mischung neutraler Mesonen

Die Mischung neutraler Mesonen und die Verletzung der CP-Invarianz wurden im System der K^0–$\overline{K^0}$ Mesonen entdeckt. Dabei ist zu beachten, das die Mischung a priori noch nichts mit der CP-Verletzung zu tun hat.

8.1.1 Theoretische Herleitung der Mischung

Eine Mischung von Zuständen neutraler Mesonen erhält man über die schwache Wechwselwirkung starker Eigenzustände $|P^0\rangle$ und $|\overline{P^0}\rangle$ vor dem schwachen Zerfall der entsprechenden Mesonen. Die starke Wechselwikrung ist flavourerhaltend, die schwache ändert die Flavoureigenzustände. Dabei kann $|P\rangle$ irrgendein pseudoskalares Meson, wie K^0, D^0, B^0, B_s^0 etc. Quantenmechanisch bedeutet dies:

$$H = H_{strong} + H_{weak}, \qquad H_{strong}|P^0\rangle = M|P^0\rangle \quad H_{strong}|\overline{P^0}\rangle = M|\overline{P^0}\rangle \tag{8.1}$$

wobei $|P\rangle$ und $|\overline{P}\rangle$ keine Eigenzustände zu H_{weak} sind. Aufgrund des CPT–Theorems gilt, daß $M = \overline{M}$. Wir betrachten nun die Zeitentwicklung von $|P\rangle$ und $|\overline{P}\rangle$ im $\{|P^0\rangle, |\overline{P^0}\rangle\}$–Unterhilbertraum:

$$|\Psi(t)\rangle = P_0(t) \cdot |P\rangle + \overline{P}_0(t) \cdot |\overline{P^0}\rangle \tag{8.2}$$

Sommit folgt (H_{weak}, H^{eff} sind nicht hermitesch, da Ψ zerfällt):

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle &= M \cdot |\Psi(t) + H_{weak} \cdot |\Psi(t)\rangle \\ i\hbar\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} P_0(t) \\ \overline{P}_0(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0(t) \\ \overline{P}_0(t) \end{bmatrix} + H^{eff.}\begin{bmatrix} P_0(t) \\ \overline{P}_0(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Zerfall (mit dem CPT–Theorem gilt, daß $\Gamma = \overline{\Gamma}$):

$$\begin{aligned} |P^0\rangle e^{-\frac{\Gamma}{2}t} &\rightarrow |0\rangle \\ |\overline{P^0}\rangle e^{-\frac{\overline{\Gamma}}{2}t} &\rightarrow |0\rangle \\ &\rightarrow H^{eff} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Gamma}{2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{i\Gamma}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Die Mischung schreibt sich dann wie folgt:

$$|\overline{P^0}\rangle \rightarrow |P^0\rangle : H_{12}^{eff} \qquad\qquad |P^0\rangle \rightarrow |\overline{P^0}\rangle : H_{21}^{eff} \tag{8.5}$$

wobei H_{12}^{eff} und H_{21}^{eff} komplexe Zahlen sind. Dies ist allerdings keine Aussage der CPT-Invarianz. Mit der Nomenklatur

$$M_{12} \equiv \frac{H_{12}^{eff} + H_{21}^{eff}}{2}, \qquad \text{und} \qquad \Gamma_{12} \equiv i(H_{12}^{eff} - H_{21}^{eff}) \tag{8.6}$$

folgt für die Off-Diagonalelemente

$$H_{12}^{eff} = M_{12} - i \cdot \frac{\Gamma_{12}}{2}, \qquad\qquad H_{21}^{eff} = M_{12}^* - i \cdot \frac{\Gamma_{12}^*}{2} \tag{8.7}$$

also innsgesammt für die Schrödingergleichung von Gl. 8.3:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ \overline{P}_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - i\frac{\Gamma}{2} & M_{12} - i\frac{\Gamma_1}{2} \\ M_{12}^* - i\frac{\Gamma^*}{2} & M - i\frac{\Gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

Aus der Diagonalisiertung erhält man mit $q, p \in C$

$$|P_{\pm}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{q}{p}\right|^2}} \Big(|P^0\rangle \mp \frac{q}{p} |\overline{P^0}\rangle\Big) \tag{8.9}$$

mit

$$\frac{q}{p} = \Big(\frac{M_{12}^* - i\frac{\Gamma_{12}^*}{2}}{M_{12} - i\frac{\Gamma_{12}}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{8.10}$$

Wir betrachten nun die Wirkung der CP–Symmetrie auf den Zustand $|P\rangle$:

$$CP|P^0\rangle = -|\overline{P^0}\rangle, \qquad\qquad CP|\overline{P^0}\rangle = -|P^0\rangle \tag{8.11}$$

Aus der Invarianz unter der CP–Transformation, also $H_{12}^{eff} = H_{21}^{eff}$, folgt, daß $M_{12} = M_{12}^* \in R$ und $\Gamma_{12} = \Gamma_{12}^* \in R$. Das ist gleichbedeutend, daß $\frac{q}{p} = 1$. Das wiederum bedeutet, daß $|P_{\pm}^0\rangle$ Eigenzustände zu CP sind, also $CP|P_{\pm}^0\rangle = \pm|P_{\pm}\rangle$). Zur weiteren Untersuchung der Zeitentwicklung betrachen wir die Lösungen der Schrödinggleichung:

$$\begin{aligned} |P_{\pm}^0; t\rangle &= P_{\pm}(t)|P_{\pm}^0\rangle, & P_{\pm}(t) &= e^{-\frac{\Gamma_{\pm}}{2}\cdot t} \cdot e^{-im_{\pm}\cdot t} \\ \Gamma_{\pm} &= \Gamma \mp 2\Im\sqrt{H_{12}^{eff} H_{21}^{eff}} & \Delta\Gamma &:= \Gamma_+ - \Gamma_- \\ m_{\pm} &= M \pm \Re\sqrt{H_{12}^{eff} H_{21}^{eff}} & \Delta m &:= m_- - m_+ \end{aligned} \tag{8.12}$$

Ausgehend von einem starken Endzustand erhält man dann

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_P^0 &= f_+(t)|P^0\rangle - \frac{q}{p} \cdot F_-(t)|\overline{P^0}\rangle \\ |\Psi(t)\rangle_{\overline{P^0}} &= f_+(t)|\overline{P^0}\rangle - \frac{p}{q} \cdot F_-(t)|P^0\rangle \\ f_{\pm}(t) &= \frac{1}{2}\Big(e^{-im_+t}e^{-\frac{\Gamma_+}{2}t} \pm e^{-im_-t}e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\Big) \end{aligned} \tag{8.13}$$

Im Falle von $m_+ \neq m_-$ erhält man Oszillationen von $|P^0\rangle \leftrightarrow |\overline{P^0}\rangle$, wenn $\Gamma_+ \neq \Gamma_-$ gilt, so folgt daraus eine Mischung durch verschiedene Zerfallsraten. Für die quantitative Berechnung gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(P^0 \to P^0; t) &= |f_+(t)|^2 = \mathrm{Prob}(\overline{P^0} \to \overline{P^0}; t) \\
\mathrm{Prob}(P^0 \to \overline{P^0}; t) &= \left|\frac{q}{p}\right|^2 \cdot |f_-(t)|^2 \\
&\neq \left|\frac{p}{q}\right|^2 \cdot |f_-(t)|^2 = \mathrm{Prob}(\overline{P^0} \to P^0; t)
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Im Falle von CP–Verletzung, gilt, daß $\frac{q}{p} \neq 1$. Dies ist gleichbedeutend zu unterschiedlichen Übergangsraten. Eine Mischung von Zuständen existiert jedoch auch ohne CP–Verletzung.

Wir wollen zum Ende der Diskusion noch die integrierten Mischungswahrscheinlichkeiten bestimmen. Dazu setzen wir:

$$x \equiv -\frac{\Delta m}{\Gamma}, \qquad \text{und} \qquad y \equiv \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma} \tag{8.15}$$

Mit den oben gewonnen Resultaten (Gln. 8.13 und 8.14) erhält man:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\mathrm{Prob}(P^0 \to \overline{P^0})}{\mathrm{Prob}(P^0 \to P^0)} = \frac{\int_0^\infty dt \left|\frac{q}{p}\right|^2 \cdot |f_-(t)|^2}{\int_0^\infty dt\ |f_+(t)|^2} = \left|\frac{q}{p}\right|^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2+x^2+y^2} \\
\overline{r} &= \frac{\mathrm{Prob}(\overline{P^0} \to P^0)}{\mathrm{Prob}(\overline{P^0} \to \overline{P^0})} = \frac{\int_0^\infty dt \left|\frac{p}{q}\right|^2 \cdot |f_-(t)|^2}{\int_0^\infty dt\ |f_+(t)|^2} = \left|\frac{p}{q}\right|^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2+x^2+y^2}
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Aus diesem Resultat ist leicht ersichtlich, was für die größtmögliche Mischung notwendig ist. Entweder muss $y \approx 1$, also $|\Delta\Gamma| \approx 2\Gamma$ sein oder $x^2 \geq 1$, also $\Delta m \geq \Gamma$.

Dazu sollen nun die wichtigsten Beispiele betrachtet werden:

8.1.2 Experimentelle Evidenzen

K^0–System

Da der Effekt der CP-Verletzung im K^0-System sehr klein ist, nehmen wir zunächst an, dass die CP–Invarianz exakt ist und die neutralen Kaonen Eigenzustände des CP–Operators seien. Einzeln gilt:

$$\begin{aligned}
C|K^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle \quad , \quad C|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \\
P|K^0\rangle &= -|K^0\rangle \quad , \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle
\end{aligned} \tag{8.17}$$

und für den kombinierten Operator erhält man dann:

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad , \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \tag{8.18}$$

Aus Gl. 8.17 und Gl. 8.18 folgt sofort, dass die CP–Eigenzustand der neutralen Kaonen wie folgt aussehen müssen

$$\begin{aligned} |K^0_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\Big] \\ |K^0_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\Big] \end{aligned} \tag{8.19}$$

Ferner gilt für diese Zustände:

$$CP|K^0_+\rangle = |K^0_+\rangle \quad , \quad CP|K^0_-\rangle = -|K^0_-\rangle \tag{8.20}$$

Gemäss der ursprünglichen Annahme entsprechen diese Zustände den tatsächlich beobachteten Teilchen. Aus den CP–Eigenwerten kann man auf die Zerfallsarten schließen. Das K^0_+ muss einen Endzustand mit $CP = 1$ von n Pionen haben[1], während das K^0_- in einen Zustand mit $CP = -1$ zerfallen muss. Für n Pionen im Endzustand folgt mit $P = P^n_\pi \cdot (-1)^L$ folgt für die Zerfälle der Teilchen:

$$\begin{aligned} K^0_+ &\rightarrow \pi^+\pi^- \;/\; \pi^0\pi^0 \\ K^0_- &\rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \;/\; \pi^0\pi^0\pi^0 \end{aligned} \tag{8.21}$$

Die Endzustände mit 2 Pionen haben $CP = 1$, für jene mit 3 gilt $CP = -1$. Dies ist von zentraler Bedeutung der Inerprätation der Experimente.

Die experimentell beobachteten Kaonen werden als K^0_S (*K–short*) und K^0_L (*K–long*) bezeichnet. Sie haben eine fast identische Masse von 498 MeV/c^2 aber sehr verschiedene Lebensdauern ($\tau_{K_S} = 8.9\cdot 10^{-9}$ s und $\tau_{K_L} = 5.3\cdot 10^{-6}$ s). Das K_S zerfällt in zwei Pionen im Endzustand, das K_L in deren drei. Damit ist die Identifikation

$$K^0_S = K^0_+ \qquad\qquad K^0_L = K^0_- \tag{8.22}$$

naheliegend. Exakte CP–Erhaltung würde also bedeuten, dass das K_L ausschließlich in drei Pionen zerfällt. Es wurden aber 1964 mit einem Verzweigungsverhältnis von 10^{-3} Zerfälle beobachtet, in denen das K_L in zwei Pionen zerfällt, was die erste experimentelle direkte Evidenz der CP–Verletzung in der schwachen Wechselwirkung war.

Wir wenden nun den oben entwickelten Formalismus an. Aufgund der Massenbilanz des K^0_L-Zerfalles $m(K^0_L) = 498$ MeV und $3 \cdot m(\pi) = 410$ MeV gilt, dass der Zerfall $K^0_L \rightarrow \pi\pi\pi$ Phasenraumunterdrückt ist. Also ist $\Gamma_+ \gg \Gamma_-$, was in konkreten Zahlen bedeutet, dass $\Gamma_+ = \Gamma_s \simeq 600\Gamma_L = 600\Gamma_- \simeq 10^{10}$ s^{-1}. Ferner gilt, dass

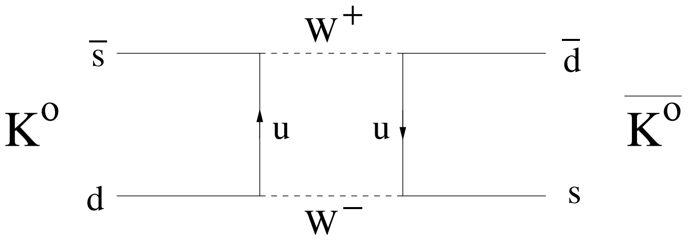
$$\Gamma = \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{2} \simeq \frac{1}{2}\cdot\Gamma_s \qquad \text{und} \qquad \Delta\Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_- \simeq \Gamma_s \tag{8.23}$$

woraus für den Parameter y aus Gl. 8.16 folgt

$$y = \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma} \simeq 1 \tag{8.24}$$

[1] Wir haben die Erhaltung von CP vorrausgesetzt.

woraus eine starke Mischung aufgrund des Zerfalls folgt. Es stellt sich noch die Frage nach dem Beitrag der Oszillation zur Mischung der Kaonen. Dazu trägt das folgende sogenannte Box-Diagramm bei:



wobei die mit u bezeichnete interne Quarklinie für ein *up*-artiges Quark steht, also u, c oder t. Da es sich hierbei um hadronische Endzustände handelt sind diese nicht perturbativ also insofern schwierig zu berechnen. Die Beiträge an den Vertices sind einerseits von den Größenordungen der CKM-Matrix abhängig

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \lambda \simeq 0.2 \tag{8.25}$$

Anderseits tragen auch die Quarkmassen zur Stärke der Kopplung mit $\frac{\Delta m_q^2}{M_W^2}$ im Box-Diagramm bei woraus sich eine klare Dominaz der Beiträge der c- und t-Quarks ergibt. Der Beitrag der CKM-Matrix für das c-Quarks ist $|V_{cs}{\cdot}V_{cd}|^2 = |1{\cdot}\lambda|^2 \simeq \mathcal{O}(\lambda^2)$ und der des t-Quarks wird entsprechend zu $|V_{ts} \cdot V_{td}|^2 = |\lambda^2 \cdot \lambda|^3 \simeq \mathcal{O}(\lambda^{10})$. Da die Massen der leichten Quakrs gegenüber der c und t Quarks vernachläsigt werden können folt mit $\Delta m_{c,t} \simeq m_{c,t}$ für das Verhältnis R_{cb} des c- zum b-Beitrages

$$R_{cb} = \Big(\frac{m_c}{m_b}\Big)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^8} \simeq 30 \tag{8.26}$$

es dominiert also der Beitrag des c-Quarks.

Im Experiment beobachtet man dies in einer Zeitabhängigen Messung des Zerfalles neutraler Kaonen. Dabei gibt es aufgrund der Mischung zwei verschiedenen Zerfallsamplituden.

$$\begin{aligned} K^0 \to K_S^0 \quad &\to \quad \pi^+\pi^- \text{ bzw. } \pi^0\pi^0 \\ \text{oder } K^0 \to K_L^0 \quad &\to \quad \pi^+\pi^- \text{ bzw. } \pi^0\pi^0 \end{aligned}$$

wobei der Zerfall K_L^0 paritätsverletzend ist (Kap. 8.2). Die Interferenz der beiden Amplituden ist proportional zu $\cos(\Delta m \cdot t)$ woraus der Massenunterschied von K_L und K_S zu $\Delta m = 3.52 \cdot 10^{-6}$ eV $= 0.54 \cdot 10^{-9}$ s$^{-1} \simeq \frac{1}{2}\Gamma_s \simeq \Gamma$ abgeschätzt werden kann. Daraus erhält man wiederum mit Gl. 8.16 für den Parameter x dass $|x| \simeq 1$ gilt. Also ist die starke Mischung der neutralen Kaonen **auch** durch die Osizllation bedingt.

D^0–System

Das D-Meson ($|D^0\rangle = |c\bar{u}\rangle$) bzw. $|\overline{D^0}\rangle = |\bar{c}u\rangle$ hat eine Masse von $M(D^0) \simeq 1.5$ GeV, welche multihadronische Zerfälle erlaubt, es also einen großen Phasenraum für die Zerfallsprodukte gibt. Entsprechend folgt, dass $\Gamma_+ \simeq \Gamma_-$ also $y \simeq 0$ woraus folgt, dass aufgrund des Zerfalles keine Mischung auftritt.

Es bleibt also die Frage, ob eine Mischung aufgrund der Oszillation bebobachtbar wäre. Wiederum betrachtet man ein Boxdiagramm (Abb. 8.1.2) einer hypotetischen $D^0/\overline{D^0}$ Oszillation, woraus man eine Unterdrückung des dominanten Faktors $|V_{ub}V_{cb}|^2$ der Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^{10})$ erhält. Ferner heben sich die d, s Beiträge wegen der CKM-Unitarität weg. Also erhält man als theoretische Erwartung $x \simeq 0$ und somit tritt auch aufgrund der Oszillation keine Mischung auf. Das D^0 System ist demnach ungeeignet für weitere Studien der Mischung oder der CP-Verletzung.

B^0–System

Die b-Quarks können mit d-Quarks zu $|B^0\rangle = |\bar{b}d\rangle$ (bzw. zu $|\overline{B^0}\rangle = |b\bar{d}\rangle$) oder mit einem s-Quark zu den Zuständen $|B_s\rangle = |\bar{b}s\rangle$ (bzw. zu $|\overline{B^0_s}\rangle = |b\bar{s}\rangle$) hadronisiertn. Da die Masse dieser Zustände mit $M(B^0) \simeq \mathcal{O}(5$ GeV) sehr groß ist, zerfallen die B-Mesonen in multihadronische Zustände, woraus folgt, dass $\Gamma_+ \simeq \Gamma_- \simeq \Gamma$ ist und $\Delta\Gamma$ in Folge dessen sehr klein wird. Quantitativ bedeutet dies im Falle der B^0 dass $y = 0$ ist und bei den B^0_s von der Größenordnung $y \simeq \mathcal{O}(0.1)$ ist. Somit erwartet man aufgrund des Zerfalles kaum eine Mischung der beiden Zustände.

Ganz anders verhält sich die Situation bei der Osizllation (Abb. 8.1). Der dominante Beitrag rührt aufgrund der Masse vom t-Quark her. Für die Stärke der Beiträge gilt dann:

$$\begin{array}{rcl} |B^0_d\rangle \longleftrightarrow |\overline{B^0_d}\rangle & \propto & m_t^2|V_{tb}\cdot V_{td}|^2 = m_t^2\cdot|1\cdot\lambda^3|^2 = m_t^2\cdot\mathcal{O}(\lambda^6) \\ |B^0_s\rangle \longleftrightarrow |\overline{B^0_s}\rangle & \propto & m_t^2|V_{tb}\cdot V_{ts}|^2 = m_t^2\cdot|1\cdot\lambda^2|^2 = m_t^2\cdot\mathcal{O}(\lambda^4) \end{array} \tag{8.27}$$

Da $m_t^2 \gg (1\ \mathrm{GeV}^2)$ ist, erwartet man demnach eine große Mischung aufgrund der Oszillation. Ferner ist die Mischung im B^0_s aufgrund des Faktors $\frac{1}{\lambda^2}$ rund 20-mal stärker als im Falle des B^0_d. Somit eignet sich das B^0-System hervorragend zur Messung der Oszillationseigenschaften sowie zur Messung der CP-Verletzung aufgrund der Oszillation.

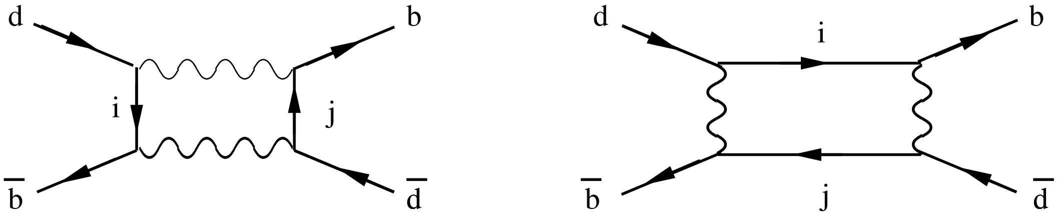


Abbildung 8.1: *Übergang eines B-Mesons in ein $\bar{B}$-Meson (Oszillation) über die Quarkflavours i und j. Wiederum sind die i, j-Quarks vom Typ "up", also u, c, t*

In der aktuellen Forschung zur Messung der CP-Verletzung ist das $B^0/\overline{B^0}$-System aufgrund der starken Mischung das wichtigste Objekt. Ferner eignen sich b-Quarks wegen ihrer relativ langen Lebensdauer hervorragend zur Messung über sekundäre Vertices. Diese Messtechnik haben wir im Kaptitel über das τ-Lepton bereits kennen gelernt (Kap. 5.4.2 und Abb. 5.18). Damit lassen sich Mesonen mit b-Quarks sehr gut rekonstruieren. Dies ist ein weiterer entscheidender Vorteil der gerade in hadronischen Wechselwirkungen von unschätzbarem Wert ist.

Ältere und aktuelle Experimente, die die Mischung und die Eigenschaften des B^0-Systemes untersuchen sind ARGUS (am DORIS-Ring am DESY, bis 1994), CLEO (in Cornell), die LEP-Experimente sowie die beiden dezidierten b-Fabriken BaBar (SLAC) und BELLE (KEK). Ein $B^0/\overline{B^0}$-Paar kann in der $\Upsilon(4S)$-Resonanz erzeugt werden. Ein ungemischter Endzustand hat die Form

$$\Upsilon(4S) \to B_d^0\overline{B_d^0} \to \mu^+\mu^- + X \tag{8.28}$$

wobei X für einen beliebigen hadronischen Endzustand steht und das $\mu^-\mu^+$-Paar vom Zerfall des b- bzw. $\bar{b}$-Quarks herrührt. Bei einem gemischten Zustand erwartet man im Endzustand dann zwei gleich geladenen Muonen, also $\mu^+\mu^+ + X$ bzw. $\mu^-\mu^- + X$.

Die aktuellen Resultate belaufen sich auf $x_d \simeq 0.67$, was kompatibel mit der Erwartung aufgrund von m_t ist. Zeitauflössendne Messungen der $B_{d,s}^0/\overline{B_{d,s}^0}$-Oszillation bei LEP lieferten über eine Abschätzung von $\Delta m_{d,s}$ einen Wert von $x_s \geq 18$. Eine wichtige Überprüfung der Kompabilität der Messung ist das Verhältnis $x_d/x_s \sim |V_{td}/V_{ts}|^2$.

8.2 CP–Verletztung

Die Verletzung der CP–Invarianz wurde erstmals 1964 (Cronin et al.) in der Reaktion $K_L^0 \to 2\pi$ bei einem Verzweigungsverhältnis von $BR = \mathcal{O}(10^{-3})$ gemessen. Für den schwachen Eigenzustand K_L^0 ist $CP = -1$, hingegen ist $CP(2\pi) = (-1)^2 = +1$. Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Messung der CP Verletzung aufgrund der Mischung geschieht, also keine direkte Beobachtung darstellen. Man spricht deshalb auch von der indirekten Messung der CP-Verletzung. Die $K^0/\overline{K^0}$-Oszillationen sind bis heute Gegenstand intensiver Untersuchungen am CERN, Fermilab in Chicago wowie beim Experiment $DA\Phi NE$ in Rom

8.2.1 Berechnung der CP-Amplitude

Zunächst soll die CP-Verlteztung vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet werden. Dabei steht der experimentelle Zugang im Vordergund. Es muss ein CP-Eigenzustand gefunden werden, der einerseits eine genügend starke Verltezung von CP aufweisst und andererseits auch gut in Experimenten erzeugt und rekonstruiert werden kann.

D^0–System

Da man, wie oben gezeigt, im $D^0/\overline{D^0}$–System keine Mischung beobachtet, kann auch die CP Verletzung aufgrund der Mischung nicht gemessen werden.

B^0–System

Wir hatten bei der obigen Diskusion gesehen, dass die Mischung im $B^0/\overline{B^0}$-System sehr gross ist, es sich somit hervorragend für die Messung der CP-Verletzung eignet. Die aktuellen Experimente konzentrieren sich desshalb ausschliesslich darauf.

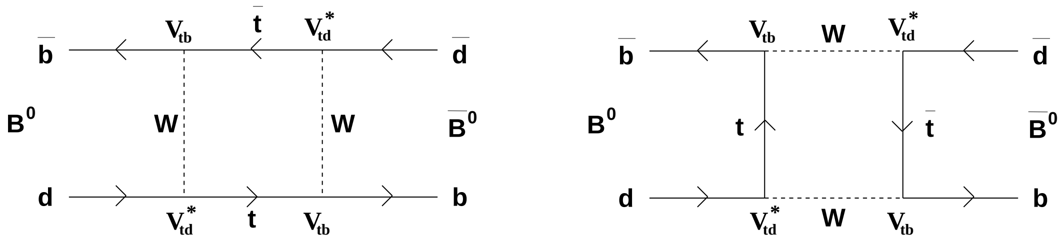


Abbildung 8.2: *Übergang eines B-Mesons in ein $\bar{B}$-Meson (Oszillation)*

Aufgrund der gossen Massen der b-Quarks gilt

$$\left|\Gamma_{12}\right| \ll \left|M_{12}\right| \rightarrow \frac{p}{q} = \Big(\frac{H_{21}^{eff}}{H_{12}^{eff}}\Big)^{\frac{1}{2}} \simeq \Big(\frac{M_{12}^*}{M_{12}}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{8.29}$$

woraus $|q/p| \simeq 1$ folgt. Betrachtet man sich wieder die Boxdiagramme von Abb. 8.2 so erhält man für die Matrixelemente M_{12} und M_{12}^*:

$$\begin{aligned} M_{12} \quad (\overline{B^0} \rightarrow B^0): \qquad & M_{12} \propto \left(V_{tb} \cdot V_{td}^*\right)^2 \\ M_{12}^* \quad (B^0 \rightarrow \overline{B^0}): \qquad & M_{12} \propto \left(V_{tb}^* \cdot V_{td}\right)^2 \end{aligned} \tag{8.30}$$

woraus folgt

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{B_d} \simeq \frac{V_{tb}^* \cdot V_{td}}{V_{tb} \cdot V_{td}^*} \simeq e^{2i\Phi_{td}} \tag{8.31}$$

wobei $\Phi_{td} = \arg(V_{td})$. Dies folgt aufgrund der Tatsache, dass $V_{tb} \simeq 1$ ist. Ebenso folgt wegen $\mathrm{Im}(V_{ts} \simeq 0)$ für die strange B-Mesonen

$$\left(\frac{q}{p}\right)_{B_s} \simeq \frac{V_{tb}^* \cdot V_{ts}}{V_{tb} \cdot V_{ts}^*} \simeq e^{2i\Phi_{ts}} \tag{8.32}$$

Die Beobachtung der CP-Verletzung ist möglich in Zerfälle in CP-Eigenzustände. Sei $|f_{CP}\rangle$ ein beliebiger CP-Eigenzustand. Dann gilt:

$$CP|f_{CP}\rangle = \eta_f|f_{CP}\rangle \qquad \eta_f = \pm 1 \tag{8.33}$$

Für die Oszillationen gelte dann

$$|B^0\rangle \xrightarrow{A} |f_{CP}\rangle \qquad \text{und} \qquad |\overline{B^0}\rangle \xrightarrow{\overline{A}} |f_{CP}\rangle \tag{8.34}$$

In einfachen Fällen gilt dann $|A|^2 = |\overline{A}|^2$. Wir betrachten nun die Zeitentwicklung mit $\Gamma = \Gamma_+ = \Gamma_-$:

$$\left|\langle f_{CP}|\Psi(t)\rangle\right|^2 = e^{-\Gamma t} \cdot |A|^2 \cdot \left[1 \pm \eta_f \underbrace{\mathrm{Im}\Big(\frac{q \cdot \overline{A}}{q \cdot A}\Big)}_{\text{CP verletzender Interferenzterm}} \cdot \sin(\Delta m \cdot t)\right] \tag{8.35}$$

Es gibt nun zwei möglichkeiten in den CP-Eigenzustand f_{CP} zu gelangen, entweder

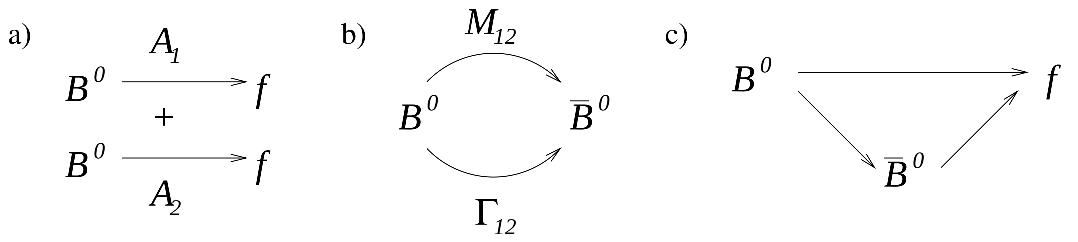


Abbildung 8.3: *Interferenz der möglichen CP-Eigenzustände f_{CP} zum Eigenwert η_f (mit Oszillation)*

direkt über B^0 oder über eine Oszillation in $\overline{B^0}$ (Abb. 8.3). Das dabei wichtigst Beispiel ist der CP-Eigenzustand

$$|f_{CP}\rangle = J/\psi \underbrace{K_s^0}_{K_S^0 \to \pi^+\pi^-} \qquad (\eta_f = -1) \tag{8.36}$$

wobei das $J\psi$ über den Zerfall in zwei Leptonen ($J/\psi \to l^+l^-$ mit $l = \mu, e$) nachgewissen wird. Der entsprechende Feynmanngraph ist in Abb. 8.4 gezeigt. In diesem Falle gilt für die Übergangsamplituden von Gl. 8.35 $A \propto V_{cb}^* \cdot V_{cs}$ und $\overline{A} \propto V_{cb} \cdot V_{cs}^*$. Somit folgt für die Zeitentwicklung der Amplitude der CP-Verletzung

$$A_{CP}(t) = \frac{N(B^0 \to J/\psi K_S^0, t) - N(\overline{B^0} \to J/\psi K_S^0, t)}{N(B^0 \to J/\psi K_S^0, t) + N(\overline{B^0} \to J/\psi K_S^0, t)} = \underbrace{-}_{\eta_f} \underbrace{\mathrm{Im}\Big(\frac{q \cdot \overline{A}}{q \cdot A}\Big)}_{\text{CPAmplitude}} \cdot \underbrace{\sin(\Delta m \cdot t)}_{B^0/\overline{B^0}\text{ Oszillation}} \tag{8.37}$$

wobei man die CP-Ampitude aus den Übergangswahrscheinlicheiten der CKM-Matrix erhält:

$$-\mathrm{Im}\Big(\frac{q \cdot \overline{A}}{q \cdot A}\Big) = -\mathrm{Im}\Big(\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{tb} V_{td}^*} \cdot \frac{V_{cb} V_{cs}^*}{V_{cb}^* V_{cs}}\Big) = -\sin\Big(2\,\arg(V_{tb}^* V_{td} V_{cb} V_{cs}^*)\Big) \tag{8.38}$$

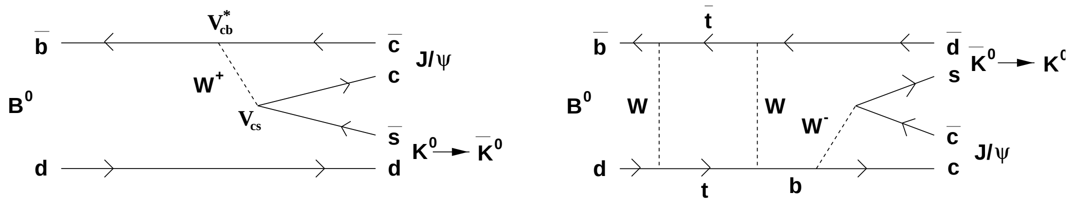


Abbildung 8.4: *Der goldene Zerfallskanal von B^0-Mesonen der sich zum Nachweiss und zum Falvourtag eignet.*

8.2.2 Unitaritätsdreieck

In Kap. 5.3.2 hatten wir die CKM-Matirx bereits diskutiert und die Entwicklung ihrer Einträge in Potenzen von $\lambda = \sin\theta_c$ (Gl. 5.17) kennen gelernt. Dies ist sie sogenannte Wolfensteinparametrisierung.

$$V_{CKM} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\cdot\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1-\rho-i\cdot\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{8.39}$$

Wird diese Parametrisierung nun auf die CKM-Matrixelemente in Gl. 8.38 angewand, so ergibt sich mit den Werten

$$\begin{aligned} V_{tb}^* &= 1 \\ V_{td} &= \lambda^3 A(1-\rho-i\cdot\eta) \\ V_{cb} &= \lambda^2 A \\ V_{cs}^* &= 1-\frac{\lambda^2}{2} \end{aligned} \tag{8.40}$$

Setzt man nun diese Parametrisierung ein, so ergibt sich für die CP-verletzende Amplitude von Gl. 8.38

$$-\mathrm{Im}\Big(\frac{q\cdot\overline{A}}{q\cdot A}\Big) = -\sin\Big(2\arg(1-\rho-i\cdot\eta)\Big) = \sin(2\beta) \tag{8.41}$$

Dies kann in einem Unitaritätsdreieck dargestellt werden.

Die CKM-Matrix muss nach Konstruktion unitär sein. Dabei gibt es verschieden geometrische Dreiecke, die der Unitaritätsbedingun $V \cdot V^* = 1$ genügen. Da wir die oben hergeleiteten Prozesse im $B^0/\overline{B^0}$ System betrachent folgt dann aus der Unitaritätsbedingung entsprechend

$$V_{ud}\cdot V_{ub}^* + V_{cd}\cdot V_{cb}^* + V_{td}\cdot V_{tb}^* = 1 \tag{8.42}$$

wobei die Terme V_{ub}^* und V_{td} entsprechend der Wolfensteinparametrisierung komplex sind. Desshalb stellt man die Bedingung in der komplexen Zahlenebene dar, in dem man die Produkte der CKM–Matixelemente $V_{ud}\cdot V_{ub}^*$, $V_{td}\cdot V_{tb}^*$ und $V_{cd}\cdot V_{cb}^*$ benutzt und zu einem Einheitsdreieck so zusammenführt, dass $V_{cd}\cdot V_{cb}^*$ als einzige rein reelle

Zahl in die reelle Ebene zu liegen kommt (Abb. 8.5). Die Winkel des Dreieckes entsprechen dann den Phasen der CKM-Elemente V_{td} und V_{ub}:

$$V_{td} = |V_{td}| \cdot e^{-i\beta} \qquad \text{und} \qquad V_{ub} = |V_{ub}| \cdot e^{-i\gamma} \tag{8.43}$$

Es ist im allgemeinen besser, eine normierte Darstellung zu benuntzen, in der $\overline{CB} = 1$ in der reellen Ebene gewählt wird. Somit nehmen die Seitenlängen die Werte $\overline{CA} = \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$ sowie $\overline{AB} = \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$ an. Die Lage des Punktes A in der komplexen Ebene ist dann abhängig vom Winkel β, der wiederum von der komplexen Phase der CP-Verletzung abhägt. Die Koordinaten des Punktes bestimmen sich dann zu

$$A = \left(\mathrm{Re}\Big(\frac{V_{ud}\,V_{ub}^*}{|V_{cd}\,V_{cb}^*}\Big), \mathrm{Im}\Big(\frac{V_{ud}\,V_{ub}^*}{|V_{cd}\,V_{cb}^*}\Big)\right) \tag{8.44}$$

In der Wolfensteinparametrisierung gilt dann für die Koordinaten

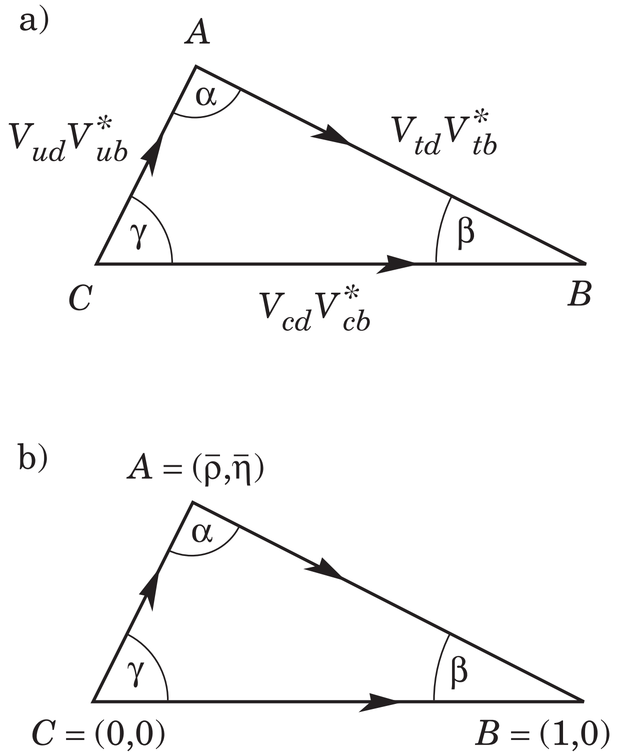


Abbildung 8.5: *Das Unitaritätdreieck im allgemeinen und auf die Basislänge 1 normiert.*

$$\bar{\rho} = \rho(1 - \frac{\lambda^2}{2}) \qquad \text{und} \qquad \bar{\eta} = \eta(1 - \frac{\lambda^2}{2}) \tag{8.45}$$

8.2.3 Experimente zur CP-Verletztung

Leptonische Erzeugung

Ein $B/\bar{B}$-Paar in der e^+e^--Vernichtung erzeugt werden, wenn die Schwerpunktsenergie die Schwelle zur Produktions von zwei B-Mesonen übersteigt. Dies ist bei der Masse des $\Upsilon(4S)$ Zustandes der Fall ($\sqrt{s} = M(\Upsilon(4S)) = 10.56$ GeV $\simeq 2 \cdot M(B^0)$). Die Beschleuniger werden dabei mit asymetrichen Strahlen betrieben ($E_{e^-} = 9.0$ GeV und $E_{e^+} = 3.1$ GeV) um im Endzustand einen Boot zu erreichen, mittels dem die unterschiedlichen Flugstrecken gemessen werden können.

Der Vorteil der leptonischen Produktion ist der sehr einfache Endzustad, da bei der Produktion keine weiteren Hadronen mehr im Spiel sind. Andererseits sind die Anforderungen an die Strahlqualität und an die Luminositäten extrem gross, es sind Luminositäten in der Größenordnung von $\mathcal{L} \simeq 10^{34}$ cm^{2}s^{-1} notwending. Die beiden aktuellen Experimente **BaBar** (Beschleuniger PEP-II am Standford Linear Accelerater SLAC) und BELLE (am Beschleuniger Center KEK Japan) haben dies heute sehr gut im Griff und produzieren exelente Resultate.

Hadronische Erzeugung

Eine andere Möglichkeit zur Produktion von $B/\bar{B}$ Paaren ist die der hadronischen, inelastischen Wechselwirkungen, wie etwa in Proton-Proton, Proton-Antiproton oder Proton-Fixtarget Streuungen. Der grosse Vorteil dieser Art der Produktion ist, dass aufgrund der hadronischen Struktur der beteiligten Objekten sehr einfach extrem grosse Luminositäten erzeugt werden können. Allerdings geht dies zu Lasten eines extrem komplexen hadronischen Endzustandes, in dem man wegen der sehr großen hadronischen Strahlenbelastung und des ungünsigen Verhältnisses von Signal zu Untergrund sowohl statistis als auch systematisch limitiert ist.

Das Experiment HERA-B am HERA-Ring am DESY Hamburg war das erste Experiment dieser Art. Dabei wurde in den Rand des Protonstrahles von HERA ($E_p = 920$ GeV) ein Drattarget gefahren, um so die hadronischen Stösse zu erzeugen (Abb. 8.6). Als erstes Experiment in diesem Feld betrat HERA-B damit technologisches Neuland und konnte somit das eigentliche Ziel der Messung der CP-Verletzung im $B/\bar{B}$ System nicht erreichen. Zur Zeit wird am LHC (Large Hadron Colider am

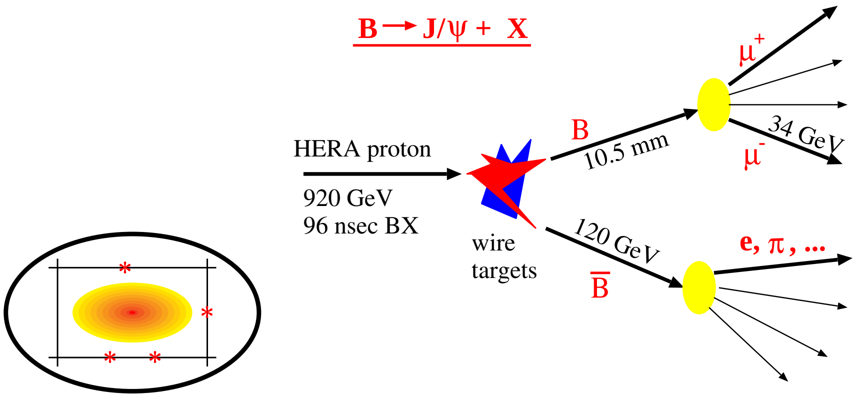


Abbildung 8.6: *Erzeugung eines $B\bar{B}$-Mesonpaares mittels inelastischer Proton-Kern-Steruungen eines Strahlprotons von HERA mit einem Drattarget (links) bei HERA-B. Die b-Quarks werden aufgrund der deutlichen Signatur über die Zerfallskette in $J/\psi + X$ nachgewiessen (rechts).*

CERN in Genf) auch ein Experiment zur Messung der CP-Verletztun gebaut, das Experiment $LHCb$ welches von den Erfahrungen von HERA-B profitiert. Dort werden Proton-Proton Wecheslwirkungen beobachtet bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 14$ TeV, wobei das Experiment als Spektrometer aufgebaut wird. Bei einem Signal zu Untergundverhältnis von $\sigma(b\bar{b})/\sigma tot \simeq 10^{-3}$ kann sehr hohe Statistik sowie eine gute systematische Präzesion erwartet werden. $LHCb$ wird ab ca. 2008 Daten nehmen, HERA-B hat die Datennahme im Jahre 2003 beendet.

8.3 Neutrino-Massen

Im Standartmodell werden die Massen der Neutrinos per Konstruktion als Null angenommen. Im Vergleich zu den Massen der übrigen Fermionen ist diese Annahme sicher gerechtfertigt und für alle bis anhin diskutierten Reaktionen ist dies auch eine gute Näherung. Das Problem einer endlichen Ruhemasse eines Teilchens ist aber von grundsätzlicher Natur.

Im ersten Teil des Kapitels wurde gezeigt, dass der Grund der Flavouroszillationen von Quarks darin besteht, dass die Eigenzustände der Quarks zur schwachen Wechselwirkung verschieden von den physikalischen Eigenzuständen mit definierter Masse sind. Im Falle der Neutrinos stellt sich deshalb die Frage, ob die in den Zerfällen $W^+ \to e^+\nu_e$ und $W^+ \to \mu^+\nu_\mu$ entstehenden Neutrinos identisch zu den Masseneigenzuständen sind. Allerdings sind Neutrinos im Gegensatz zu den Quarks stabil und treten als freie Teilchen auf und werden immer in Zerfallsprozessen einzeln Erzeugt. Diese Eigenschaften unterscheidet eine potentielle Neutrinoosizillation wesentlich von den Quarkoszillationen.

Wir erinnern uns noch an die Ladungskonjugation (Übung 2), die für die Übergänge zwischen Neutrinos und Antineutrinos wichtig ist:

$$\Psi \longrightarrow \Psi^C = \hat{C} \cdot \overline{\Psi}^T = i\gamma_2\gamma_0(\Psi^\dagger\gamma_0)^T \tag{8.46}$$

Die konjugierten chiralen Zustände sind dann

- $\Psi_L^C := \left(\Psi^C\right)_L = \left(\Psi_R\right)^C$: CP konjugierter Zustand von Ψ_L
- $\Psi_R^C := \left(\Psi^C\right)_R = \left(\Psi_L\right)^C$: CP konjugierter Zustand von Ψ_R

8.3.1 Dirac- und Majorana-Neutrinos

Im Standartmodell treten die geladenen Leptonen der ersten Generation in den chiralen Zuständen L_{e^+}, L_{e^-}, R_{e^+} und R_{e^-} auf, welche im Grenzfall vernachläsigter Massen den Helizitäts-Zuständen e_L^+, e_L^-, e_R^+ und e_R^- entsprechen. Allerdings koppelt die $(V-A)$-Struktur der schwachen Wechselwirkung die Neutrinos L_ν und $L_{\bar{\nu}}$ and L_{e^-} bzw. L_{e^+}. Neutrinos nehmen ausschliesslich an der schwachen Wechselwirkung teil, also bleiben für $m_\nu = 0$ nur die Helizitätszustände $\nu_{e,L}$ und $\bar{\nu}_{e,R}$ übrig, die anderen Zustände $\nu_{e,R}$ und $\bar{\nu}_{e,L}$ sind in der Natur nicht realisiert. Analoge Überlegungen lassen sich für alle Prozesse der schwachen Wechselwirkung anstellen, an denen Neutrinos beteiligt sind. Es stellt sich also die berechtigte Frage, ob die Zuordnung einer Leptonzahl zu den Neutrinos überhaupt notwendig ist und ob die Teilchen von den Antiteilchen überhaupt physikalisch unterscheidbar sind. Im Gegensatz zu den Neutrinos unterscheiden sich im Falle der Elektronen die Teilchen von den Antiteilchen auch durch die Ladung.

Die Dirac-Theorie sagt vier Zustände definierter Leptonenzahl und Chiralität vorraus, von denen in der Natur allerdings nur zwei realisiert sind. Eine darin begruendete alternative Beschreibung wurde von Majorana bereits 1937 vorgeschlagen, in der es in jeder Generation ein linkshändiges Neutrino ν_L^M und ein rechtshändiges Neutrino ν_R^M ohne Leptonzahl gibt. In diesem Schema ist das Neutrino, genau wie das π^0, sein eigenes Antiteilchen. Falls Neutrinos keine Masse haben, ist die Unterscheidung zwischen Dirac- und Majorana-Neutrinos jedch nicht möglich.

Im Falle von **Dirac - Neutrinos** mit Masse erhält man neue Freiheitsgrade mit ν_R und $\bar{\nu}_L$. Bei Dirac-Neutrinos wird die Erhaltung der Leptonzahl gefordert, das Antiteilchen muss also vom Teilchen unterscheidbar sein.

Aus dem Higgsmechanismus wissen wir:

$$\mathcal{L}_D = m^D \cdot \bar{\nu}_D \nu_D = m^D(\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R) = m^D(\overline{\nu^C}_R \nu_L^C + \overline{\nu^C}_L \nu_R) \tag{8.47}$$

mit $\nu_D = \nu_L + \nu_R$ und $\nu_D^C = \nu_L^C + \nu_R^C$, wobei die Übergänge $\nu_L \leftrightarrow \nu_R$ bzw. $\nu_L^C \leftrightarrow \nu_R^C$ beobachet werden, die Leptonzahl also erhalten ist.

Bei der Konstruktion der **Majorana - Neutrinos** wird die Forderung aufgestellt, das sich die konjugierten Zustände Ψ und Ψ^C physikalisch nicht unterscheiden sollen. Dies wurde konstruiert für Teilchen, bei denen sich alle erhaltenen Ladungen zu null adieren. Aus der eingangs gestellten Forderung folt, dass die Leptonzahlen im Falle der Neutrinos nicht erhalten sind. Ferner sind ν_L und ν_R^C bzw.ν_R und ν_L^C physikalisch nicht unterscheidbar.

Für die Majorana-Massentherme gilt dann

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_L^M &= \frac{1}{2} m_L^M (\overline{\nu_L} \nu_R^C + \overline{\nu_R^C} \nu_L^C) \\ -\mathcal{L}_R^M &= \frac{1}{2} m_R^M (\overline{\nu_R} \nu_L^C + \overline{\nu_L^C} \nu_R^C) \end{aligned} \tag{8.48}$$

Der Lagrangien ist ein Lorentz-Skalar, der allerdings nicht aus der Standard-Higgs Theorie folgt. Die Massen mL, R^M sind die Kopplungen für den Übergang $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$, bei die Leptonzahl L nicht erhalten ist ($\Delta L = 2$). Somit gilt für die Masseneigenzustände ν_1 und ν_2 von Majorana-Neutrinos:

$$\begin{aligned} \nu_1 = \nu_L + \nu_R^C \quad &\Longrightarrow \quad \nu_1^C = \nu_1 \\ \nu_2 = \nu_R + \nu_L^C \quad &\Longrightarrow \quad \nu_2^C = \nu_2 \\ -\mathcal{L}_L^M = \frac{1}{2} m_L^M \bar{\nu}_1 \nu_1 \quad & \quad -\mathcal{L}_R^M = \frac{1}{2} m_R^M \bar{\nu}_2 \nu_2 \end{aligned} \tag{8.49}$$

8.3.2 Physikalische Neutrinomasse

8.3.3 Experimente zur Neutrinomassenbestimmung

8.3.4 Experimente zur Neutrinomasenbestimmung

8.4 Neutrino Oszillationen

8.4.1 Theoretische Grundlagen

8.4.2 Experimentelle Ansätze

8.4.3 Atmosphärische Neutrinos

8.4.4 Solare Neutrinos

8.4.5 Der MSW-Effekt